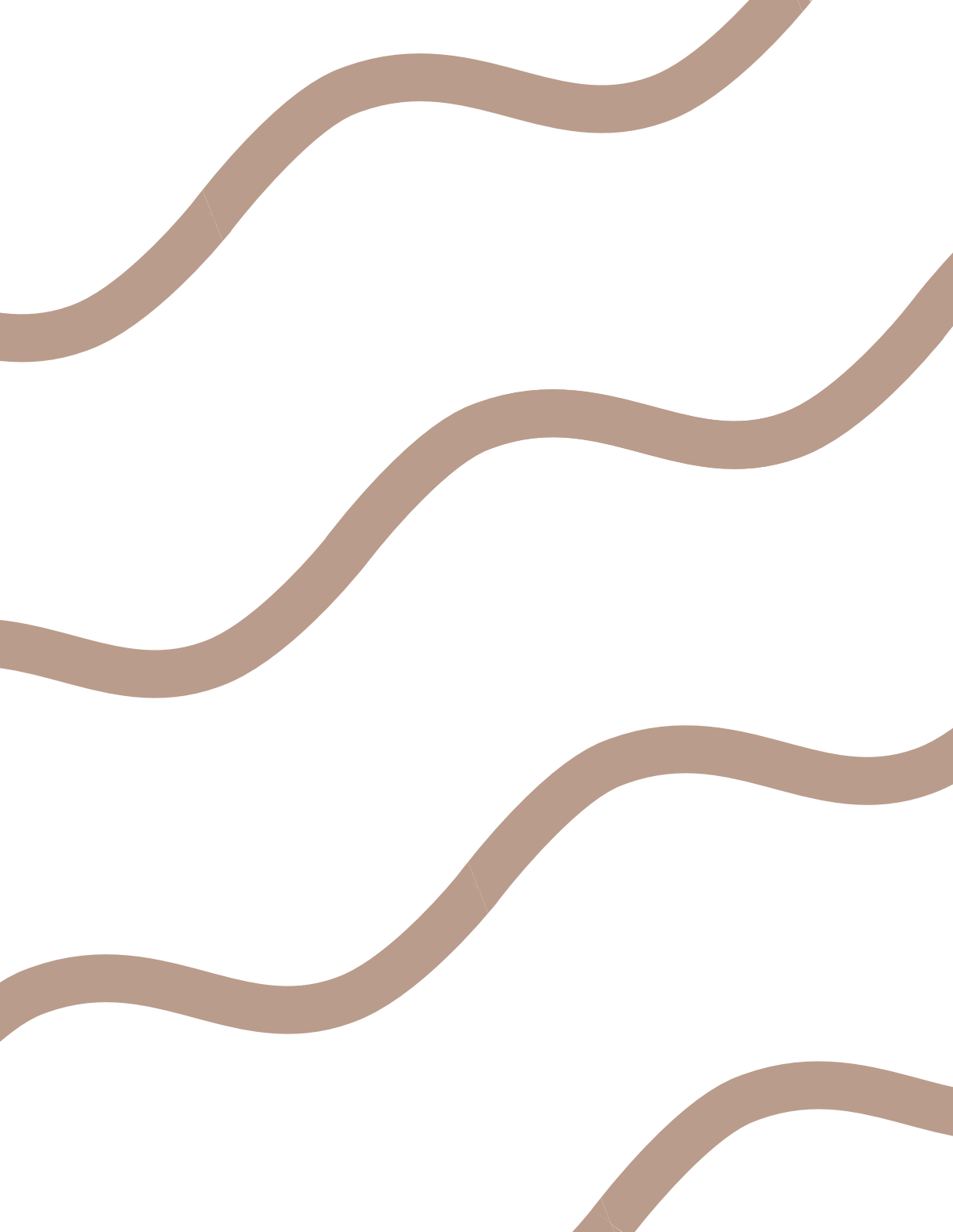




1. Волновое уравнение и его решение в виде бегущей волны. Параметры волнового процесса (длина волны, волновое число, частота, период, фазовая скорость) и соотношения между ними. Продольная и поперечная волна. Волновой фронт. Плоская волна.
2. Понятие волны. Физическая интерпретация условия устойчивости разностных схем бегущего счета для волнового уравнения. Максимальная скорость переноса возмущений по сетке.
3. Система уравнений гидродинамики, граничные условия. Приближение сплошной среды.
4. Приближение линейной акустики. Вывод уравнения для звуковых волн. Скорость звука. Диапазон звуковых частот.
5. Условия на границе раздела для акустических волн. Импеданс среды. Коэффициенты отражения и прохождения. Отражение с "потерей полуволны".
6. Закон сохранения энергии звуковой волны. Поток и объемная плотность акустической энергии. Интенсивность.
7. Интенсивность акустической волны. Порог слышимости. Болевой порог. Шкала децибел.
8. Уравнение Бюргерса. Ударная волна.
9. Электромагнитные волны. Вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла. Скорость света. Показатель преломления.
10. Шкала электромагнитных волн. Длина волны в видимой части спектра, радиодиапазоне и диапазоне сотовой связи.
11. Поперечность электромагнитной волны в свободном пространстве, как следствие уравнений Максвелла. Ориентация векторов E , H , k .
12. Энергия электромагнитной волны. Уравнения Максвелла. Плотность потока энергии, объемная плотность энергии. Интенсивность излучения. Солнечная постоянная.
13. Стоячие волны; узлы и пучности. Изменение напряженности полей, плотность и поток энергии в электромагнитной стоячей волне.
14. Энергетический баланс солнечного излучения в атмосфере. Парниковый эффект.
15. Давление электромагнитной волны. Волновой механизм возникновения давления.
16. Нормальное падение электромагнитной волны на границу раздела двух сред. Период и длина волны в граничащих средах.
17. Электромеханическая аналогия в теории волн.
18. Законы отражения и преломления.
19. Полное внутреннее отражение.
20. Земная рефракция. Рефракция звука в океане. Подводный звуковой канал.
21. Радуга.
22. Волоконная оптика. Волоконно-оптические линии связи.
23. Поляризация электромагнитных волн. Линейная, эллиптическая, круговая поляризация. Естественный свет.
24. Отражение и преломление поляризованных волн. Формулы Френеля.
25. Поляризационные эффекты на границе раздела. Угол Брюстера.
26. Построения Гюйгенса для волнового фронта. Распространение электромагнитных волн в кристаллах. Двулучепреломление.
27. Оптическая активность и круговой дихроизм.

28. Принцип работы ЖК дисплеев.
29. Способы передачи информации волной. Биения, амплитудная модуляция, частотный спектр сигнала с амплитудной модуляцией по гармоническому закону. Модуляция радиосигнала в АМ и ФМ диапазонах.
30. Суперпозиция эквидистантных гармоник. Квазигармонический сигнал при конечном и бесконечном числе гармоник. Теорема о ширине частотной полосы.
31. Спектр периодического сигнала. Спектр последовательности прямоугольных периодических импульсов. Влияние длительности импульса и периода следования на спектр. Осцилляции Гиббса.
32. Спектр одиночного импульса. Предельный переход от дискретного спектра к сплошному. Интеграл Фурье. Спектр прямоугольного импульса. Длительность импульса и ширина его спектра.
33. Спектральная плотность мощности. Энергетическая ширина спектра. Теорема Планшереля.
34. Связь формы импульса и ширины спектра.
35. Свойства преобразования Фурье: формулы запаздывания, смещения, свертки.
36. Функция дискретного аргумента и ее спектр. Периодизация спектра. Частота Найквиста. Наложение частот.
37. Формулы дискретного преобразования Фурье. Выбор шага сетки и интервала периодизации.
38. Восстановление сигнала по его дискретным отсчетам. Формула Котельникова–Шеннона.
39. Спектральная фильтрация сигналов.
40. Пространственная и временная дисперсия. Формула Рэлея.
41. Первое приближение теории дисперсии. Волновой пакет. Групповая скорость. Уравнение переноса для огибающей пакета. Бегущее время.
42. Второе приближение теории дисперсии. Расплывание волнового пакета. Параболическое уравнение дисперсии для амплитуды. Решение для Гауссова импульса. Дисперсионная длина.
43. Влияние дисперсии на скорость передачи информации в волоконно-оптических линиях связи.
44. Волны в цепочках. Дисперсионное уравнение. Длинноволновое приближение. Полоса прозрачности. Движение в цепочке при частотах внутри и вне полосы прозрачности.
45. Дисперсия разностной схемы волнового уравнения. Цепочка как физический аналог разностной схемы. Частота Найквиста и верхняя граница полосы прозрачности цепочки.
46. Электронная теория дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсия электромагнитных волн. Линии поглощения.
47. Распространение импульса в среде с нормальной и аномальной дисперсией.
48. Двулучевая интерференция. Суперпозиция плоских волн, ширина интерференционной полосы. Условия интерференционного максимума и минимума.
49. Интерференция волн от двух точечных источников.
50. Интерференция в тонких пленках. Цвета тонких пленок.
51. Просветляющее покрытие.
52. Интерференция квазимонохроматических волн. Условие возникновения интерференционной картины. Понятие о когерентности.
53. Когерентность волн и видимость интерференционной картины. Степень когерентности.
54. Экспериментальное определение степени когерентности. Время когерентности для случайной последовательности импульсов.
55. Теорема Винера–Хинчина. Понятие о Фурье-спектроскопии.
56. Многолучевая интерференция волн от цепочки синфазных источников. Положение и ширина главных максимумов.

57. Антенные решетки. Угловое разрешение. Диаграмма направленности и ее сканирование.
58. Многолучевая интерференция. Интерферометр Фабри–Перо.
59. Постановка задачи дифракции. Принцип Гюйгенса–Френеля. Качественный вид дифракционной картины.
60. Математическая формулировка задачи дифракции. Логика приближений в теории дифракции. Формула Френеля–Кирхгофа.
61. Формула Френеля–Кирхгофа. Приближение Френеля
62. Анализ дифракции на отверстиях с помощью зон Френеля.
63. Пятно Пуассона.
64. Дифракция Френеля. Параболическое уравнение дифракции.
65. Эффект Тальбо.
66. Дифракция Фраунгофера. Угловой спектр плоских волн.
67. Дифракция на щели и прямоугольном отверстии.
68. Дифракция на круглом отверстии. Дифракционная расходимость.
69. Пространственно-временная аналогия. Пространственный спектр при дифракции на щели и частотный спектр прямоугольного импульса.
70. Ближняя и дальняя зоны дифракции. Приближение геометрической оптики. Число зон Френеля в отверстии для различных приближений теории дифракции.
71. Фурье-оптика. Спектральная фильтрация изображений.
72. Голография. Принцип записи и восстановление голографических изображений. Роль когерентности света при записи голограмм.
73. Принципы работы лазера. Накачка. Усиление. Обратная связь (резонатор). Условие генерации.
74. Свойства лазерного излучения. Применение лазеров в устройствах записи и передачи информации, медицине и обработке материалов.

Контрольные вопросы

(уровень знаний, необходимый, но недостаточный для сдачи экзамена)

1. Волновое уравнение и его решение в виде бегущей волны. Соотношения между параметрами волнового процесса (длина волны, волновое число, частота, период, фазовая скорость).
2. Акустические волны. Формула для скорости звука в воздухе и ее величина. Порог слышимости. Характерные значения силы звука в децибелах.
3. Шкала электромагнитных волн. Длина волны в видимой части спектра, радиодиапазоне и диапазоне сотовой связи. Скорость света в вакууме и материальных средах.
4. Волновой механизм возникновения давления электромагнитных волн. Формула для давления света.
5. Законы отражения и преломления. Полное внутреннее отражение. Ход лучей в оптическом волокне.
6. Формулы преобразования Фурье. Дискретный и сплошной спектр Фурье. Свойства преобразования Фурье.
7. Теорема о ширине частотной полосы. Спектр уединенного прямоугольного импульса и периодической последовательности таких импульсов.
8. Формулы дискретного преобразования Фурье. Частота Найквиста. Выбор шага сетки и интервала периодизации.
9. Формула Котельникова–Шеннона.
10. Определение дисперсии. Групповая скорость. Первое и второе приближения теории дисперсии. Влияние дисперсии на скорость передачи информации в оптических линиях связи.

11. Пространственная дисперсия в цепочке. Дисперсия разностной схемы для волнового уравнения.
12. Определение понятия интерференции. Определение понятия когерентности.
13. Ширина полос при двулучевой интерференции.
14. Теорема Винера–Хинчина.
15. Угловое распределение интенсивности при многолучевой интерференции. Положение и ширина максимумов.
16. Определение явления дифракции. Смысл приближений Кирхгофа.
17. Метод зон Френеля в решении задач дифракции.
18. Эффект Тальбо.
19. Распределение интенсивности света при дифракции на щели. Дифракционная расходимость.
20. Определение размеров отверстий и расстояний для ближней и дальней зон дифракции и приближения геометрической оптики.
21. Принципиальная схема лазера.
22. Свойства лазерного излучения.

Примечание

Пакет программ "Физика волновых процессов" с компьютерными демонстрациями размещен на сайте кафедры общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ <http://ofvp.phys.msu.ru> (закладка "Наука и учеба"; закладка "Лекции и практикумы" (выбрать "Физика волновых процессов"); закладка "Ссылка по теме").

1) Волновое уравнение и его решение в виде бегущей волны. Параметры волнового процесса: волновое число, частота, период, фазовая скорость и связь между ними. Продольная и поперечная волны. Волновой фронт плоская волна.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Волновое уравнение.}$$

Функция ξ - описывает некоторое возмущение, отклонение от равновесного значения

В акустике: ξ - неравновесное давление, которое возникает в атмосфере при распр. волны

В элект-магн-х волнах ξ - напряженность электрич/магнитного поля

c $\left[\frac{м}{с}\right]$ - нормировочная константа; $\frac{1}{c}$ - фазовая скорость

Решение волнового уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \xi = 0$$

Реш: $\xi = f(x-ct)$ - решение; $\leftarrow$ Волна, которая бежит вправо вдоль оси OX со временем

$$\text{Проверка: } -c f'(x-ct) + c f'(x-ct) \equiv 0$$

Чтобы понять в какую сторону бежит волна: увелич. крайнюю точку в про-е (некоторое знач ξ) и

интересуемся, как это функ-я точки ведет себя в про-е x времени: по прош-ти времени $-ct$ - возросло и если мы хотим, чтобы $\xi = \text{const}$ (т.е. мы остались в той же точке $\Rightarrow x$ тоже возрастает).

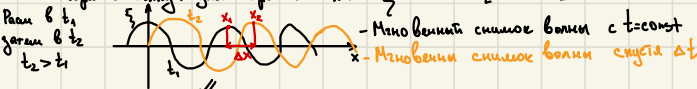
Если аналогично образом распр. первую скорость, то решение будет:

$\xi = f(x+ct)$ $\leftarrow$ Волна, бегущая влево вдоль OX.

$\xi_1 = f(x_1 - ct_1)$ в момент времени t_2 $\xi_2 = f(x_2 - ct_2)$, так $\xi = \text{const} \Rightarrow$

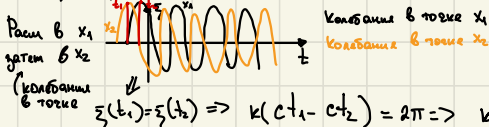
$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = c(t_1 - t_2) \Rightarrow c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Решим первую волну: для прод-х волн $\xi = A \cos[k(x-ct)]$



$k = \left[\frac{рад}{м}\right]$ - нормир-е констан-а, чтобы косинус принимал безразмерную величину
 k - волновое число

$$\xi(x_1) = \xi(x_2) \Rightarrow k(x_2 - x_1) = 2\pi \Rightarrow \Delta x = \frac{2\pi}{k} \quad \text{Периодом этой функции т.е. } \Delta x \text{ называют длиной волны: } \lambda = \frac{2\pi}{k} [м]$$



$$\text{Линейная частота волны } \nu = \frac{1}{T} [с^{-1}] = [гц]$$

$$\text{Угловая частота } \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{рад}{с}\right]$$

$$\xi = A \cos(kx - \omega t)$$

$i(\omega t - kx + \varphi)$ - нач. фаза

$\xi = A e^{i(\omega t - kx + \varphi)}$ - комплексная форма записи

$\xi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$ - многомерная волна $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Волновой фронт - совокупность точек в пространстве для которых фаза волны = const.

Плоская волна - волна, фронт которой - плоскость

Волновой вектор $\vec{k}$ $\perp$ волновому фронту в $\forall$ точке пространства

Волновой вектор показывает направление в котором перемещается волновой фронт или напр-е перемещ-я фазы волны

Пример: Сферическая волна на очень большом расстоянии от источника (Солнце)

Для сфер-й волны: $\xi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)}$

Для улит-й волны: $\xi = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)}$

Поперечная волна - ξ изменяется в плоскости $\perp$ волновому вектору $\vec{k}$.

$\forall$ электромагнитная волна явл. поперечной

Продольная волна - ξ изменяется в том же направлении, что и волновой вектор $\vec{k}$

$\forall$ акустические волны явл. продольной

② Плоские волны. Физическая интерпретация условия устойчивости разностных схем Бегун

Волна - это возмущение, которое передается от одной части пространства к другой

Пространственный шаг h

Временной шаг τ

След замечание: если мы хотим проанализировать распр волнового процесса в некоторой среде

Тогда, когда h сопоставим с λ , в таком случае среда становится почти дискретной

Хорошо, когда $h < \lambda$, а лучше $h \ll \lambda$

Выбор τ : $\tau \leq \frac{h}{c_0}$ - предельная скорость распр-я возмущения на сетке, т.е. быстрее чем c_0 возмущение распр-я не может
 τ - должно быть достаточно мало, чтобы $\frac{h}{\tau} \geq c$, где c - скорость распр-я реального возмущения

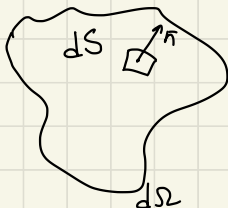
③ Система уравнений гидродинамики, граничные условия. Приближение сплошной среды.

ρ - масс. эл-т объема сплошной среды:

Эл-т объема: $d\Omega$ плотность среды ρ

около объема замкнутой поверхн-ю S

выделим эл-т поверхн-и dS



$\vec{n}$ - внешняя нормаль

По 2-у закону Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt}$ ← Не обязана быть постоянной!

Масса этого эл-та объема $m = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega$

Будем предполагать, что сила $\vec{F}$ - это сила внешнего давления (давит на эл-т объема)

$\vec{F} = - \iint_S p d\vec{S} = d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ (т.е. все внешн-е среда)

$= - \iint_S p d\vec{S} \stackrel{\text{т.е. мы предполагаем, что сила "сдавливает" объем, действует сжимающее}}{=} - \iint_S p d\vec{S} \stackrel{\text{По теореме остр-ва}}{=} - \iint_S p \vec{n} dS = - \iiint_{\Omega} \text{div}(p\vec{n}) dV$

Объединяя все внешенписанное в $m\vec{a} = \vec{F}$ получим:

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = 0$ - Уравнение Эйлера (Уравнение опис-т движение частиц среды)

$\vec{v}$ - НЕ СКОРОСТЬ ВОЛН, А СКОРОСТЬ ЧАСТИЦ СРЕДЫ !!!

Данное уравнение связывает 3 поля-е неизвестные: давление p , скорость $\vec{v}$ и плотность ρ , но их нужно как-то найти.

Дополним это уравнение уравнением непрерывности:

$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S}$ (изм-е массы может проис-ть из-за изм-е потока массы через границу $d\Omega$)

$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} \stackrel{\text{т.о.ст.-р}}{=} \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{v}) d\Omega \Rightarrow$ получим:

$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{v}) d\Omega \Rightarrow$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (Если масса и изм-е, то изм-ее за счет потока массы через поверхность)

$\rho \chi = \text{const}$ - ур-е Адиабатиче-го процесса (т.е. процесс без теплообмена с окр. сред.)

$\chi = \frac{C_p}{C_v}$ - теплоемкость при $p = \text{const}$
 C_v - теплоемкость при $v = \text{const}$

Представим, что в эл-е объема возникло нем-е возмущение (за счет акустич-н волн)

$\rho \chi = \rho_0 \chi_0$ $\chi = \text{const} \Rightarrow \rho \chi = \rho_0 \chi_0 \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)$

$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\chi}{\chi_0}\right) = \left(\frac{p}{p_0}\right) \Rightarrow p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\chi$

Рассм. ур-е движения: $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla P = 0$

P_0, ρ_0 - начальное давление и плотность, а P, ρ давление и плотность после малых возм-ий P' и ρ' т.е:

$$P = P_0 + P' \quad \frac{P'}{P_0} \ll 1 \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

наша предпосылка

Рассм $\frac{d\vec{v}}{dt}$, замечаем, что в общем случае скорость явл. сложной функ-ей: $\vec{v} = \vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$
 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \right)$, подставим в ур-е движ-я.

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \right) + \nabla P = 0$$

① Оценим: имеет ли масштаб отношение скорости к времени $\sim \frac{v}{T}$

② Характерный масштаб при этом это длина волны λ $\frac{v}{\lambda} \cdot \lambda = \frac{v^2}{\lambda}$

Рассм: $\frac{v^2}{\lambda} : \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{c_0} \ll 1$ NB! Нужно, чтобы применялись эти масштабные (Про-и произ-и $\frac{\partial v}{\partial x} \dots \frac{\partial v}{\partial z}$)
или требуем чтобы скорость частиц в среде $\ll$ скорости рас-е волны в среде

После этих малых возм-ий получим:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla P = 0$$

Вернемся к ур-ю кин-ки: $\frac{\partial(\rho' \rho_0)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho') \vec{v}) = 0$ $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ в $\text{div} \vec{v}'$ - применяем то что получили

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v} = 0$$

Рассм. прир-е давления, $P' = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \rho'$

Применим к уравн-ю движение оператор div :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{v} + \text{div}(\nabla P') \Big|_{\rho_0} = 0$$

Применим к ур-ю непрерывности $\frac{\partial \rho'}{\partial t}$:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{v} = 0$$

Исключая $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{v}$, получим: $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = 0$, где $c_0^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0} \Rightarrow P' = c_0^2 \rho' \Rightarrow \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta P' = 0$

[Без грав-ва]: это волновое ур-е выпл-е из-за скорости $\vec{v}$

Рассм. одн-е решение этого ур-я: $P' = \rho' e^{i(\omega t - kx)}$; $\rho' = \rho'_0 e^{i(\omega t - kx)}$

$\Delta \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; добавим в уравн-е непрерывности: $i\omega \rho' e^{i(\omega t - kx)} - \rho_0 i k v_z e^{i(\omega t - kx)} = 0$

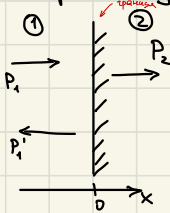
$\Rightarrow \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{v_z}{\omega} = \frac{v}{c_0} \ll 1$; число Маха $\frac{v}{c_0} \ll 1$

$$c_0^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho_0}$$

Введем $\beta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \rho}$ - сжимаемость, она показывает отн. изме-е плотно-и под действием нек-го давления;

$c_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta}$; $\Rightarrow$ чем больше β , тем меньше скорость акуст-й волны.

Граничные условия:



Ур-е движения: $\rho_0 \frac{dV}{dt} + \nabla P = 0$
 $v = v_0 e^{i(\omega t - kx)}$ $P = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$ (Прогн-и, это скорость и давл-е из-за по закону т-й волны)

Подставим в ур-е движения:
 $\rho_0 \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t - kx)} - i p k \cdot e^{i(\omega t - kx)} = 0$

$\rho_0 \omega - p k = 0 \Rightarrow p = \frac{\rho_0 v \omega}{k} = \rho_0 c_0 \cdot v = \{ \} p_0 c_0 = Z \} = Z v$

Z - акустический импеданс среды

1) Волна может через границу пройти P2

Запишем гр-е условия: есть 2 варианта: 1) от границы отражается P1' 2) от границы отражается P1' (это давление складывается из 2-х источников из падающей волны + отр. волн)
 Полное давление в среде ①: $P_0 = (P_1 e^{ik_1 x} + P_1' e^{ik_1 x}) e^{i\omega t}$ (Здесь было P1, P1')

Полное давление в среде ②: $P_0 = P_2 e^{-ik_2 x} e^{i\omega t}$

Частота волны не меняется при переходе из одной среды в другую!!!

Гр-е условие состоит в том: это давление в первой среде = давлению во второй среде на границе

Но еще это условие - это равенство сил или скорости на границе

Это условие должно выполняться $\forall t$ это возможно только если частота одна

$P_0|_{x=0} = P_2|_{x=0}$ $V_0|_{x=0} = V_2|_{x=0}$ 1-е гр-е условие равенство давлений на границе раздела 2-е гр-е условие равенство скорости частиц на границе раздела должно совпадать

Волновое число k меняется это $\Rightarrow \lambda = c_0 T = \frac{c_0}{v} = \frac{c_0 \cdot 2\pi}{\omega} = -const$ длина волны длин из-за т.к частота - const, а скорость падает

А т.к $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $z_1 > z_2$

Вспомогательные гранич условия:

Ур-е дин: $\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ $v = v_0 e^{i(\omega t - kx)}$

$\rho_0 \cdot i\omega \cdot v = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow v = \frac{1}{\omega \rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \{ \omega = kc \} = \frac{1}{k \rho_0 c_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{k_2 c_2 \rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$

из гр-х усл-ий: $\begin{cases} P_1 + P_1' = P_2 \\ \frac{1}{c_1 \rho_1} (-P_1 + P_1') = \frac{1}{c_2 \rho_2} P_2 \end{cases}$

Кэф отраж (по давлению) $R_p = \frac{P_1'}{P_1} \Rightarrow R_p = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$ (Знак "-" помнит противоречивый хар-р в случае когда $z_1 > z_2$)

Кэф пропущ (по давл-ю) $T_p = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow T_p = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}$ (> 0) (Прочнее всегда в фазе)

Аналогично для скорости v $R_v = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ $T_v = \frac{2z_1}{z_2 + z_1}$

$z_1 \gg z_2$ $R_p \rightarrow -1$; $T_p \rightarrow 0$ $R_v \rightarrow 1$ $T_v \rightarrow 2$

6) Закон сохранения энергии звуковой волны. Поток и объемная плотность акустической энергии. Интенсивность

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad | \cdot \bar{v} \Rightarrow \rho_0 \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) + (\bar{v} P, \bar{v}) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 (\bar{v}, \bar{v}) = 0 \cdot \frac{P}{\rho_0} \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial t} P + (\bar{v}, \bar{v}) P = 0 \right) \oplus \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla (P \bar{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div } S = 0 \leftarrow \text{ЗСЭ в акустич. волне}$$

ω - Объемная пл-та энергии $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$ сколько энергии заключено в единице объема в сист. если в среде распространяется акустическая волна

S - Плотность потока энергии акустич. волны $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Ватт}}{\text{м}^2} \right]$ какое количество энергии переносит волна за ед. времени чрез ед. площадь

$$P = \rho_0 c_0 V, \quad \bar{v} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2}, \quad \omega = \frac{1}{2} \rho_0 \bar{v}^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 \bar{v}^2}{2 \rho_0 c_0^2} = \rho_0 \bar{v}^2$$

$$\| S \| = P \bar{v} = \rho_0 c_0 \bar{v}^2 = c_0 \omega$$

Интенсивность: $I = \langle S \rangle_{T+}$ ср. зн-е за T плотности потока энергии

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 c_0 \bar{v}^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho_0 \bar{v}^2(t) dt \quad I = \left[\frac{\text{Ватт}}{\text{м}^2} \right] \text{ показывает сколько в среднем проходит энергии чрез ед. площадь за ед. времени}$$

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 \bar{v}^2 \quad \text{не зависит от времени и от координат}$$

Интенсивность акустической волны. Порог слышимости. Болевой порог. Шкала децибел

$$\text{Сила звука: } L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad \text{где } I_0 = 2 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ватт}}{\text{м}^2} - \text{порог слышн-и}$$

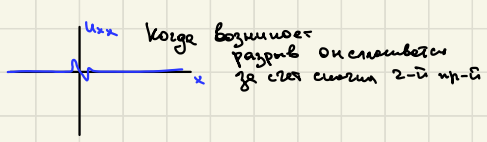
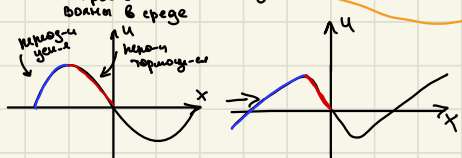
$$L - [\text{ДБ}]$$

$$\text{Болевой порог } > 10^2 \frac{\text{Ватт}}{\text{м}^2} = 120 \text{ ДБ}$$

⑧ Уравнение Бюргера. Ударная волна. Не линейные волны

$$u_t + (c + bu)u_x = \nu u_{xx}$$

скорость частиц в волне
 скорость волны в среде
 пренебрегает разрыв фронта
 вязкость



Если пренебречь ν , то получим
 $u_t + cu_x = 0$ - ур-е переноса
 скорость волны

когда возникает разрыв он становится за счет вязкости 2-й пр-б

9) Электромагнитные волны. Вывод волнового уравнения из уравнения Максвелла. Скорость света. Показатель преломления

Уравнения Максвелла:

$\text{div } \vec{D} = \rho$ - теорема Гаусса

$\text{div } \vec{B} = 0$ - отсутствие магнитных монополий

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - теорема о циркуляции (уравнение описывает магнитное поле, созданное током ^{или током} ^{или током} ^{или током})

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - закон электромагнитной индукции

$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ - связь вектора электрической индукции с напряженностью электрического поля

$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ - связь вектора магнитной индукции с напряженностью магнитного поля

Дифференциал по времени

Для выходящей среды $\rho = j = 0$ применим к 4-му уравнению оператор rot получим:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \text{rot } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ \text{rot rot } \vec{E} &= \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}: \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i}$$

$$\textcircled{2}: \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} \right) \vec{j}$$

и т.д.

$$\text{В итоге: } \text{rot rot } \vec{E} = \nabla \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = \{ \rho = 0 \} = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{rot } \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } (\mu \mu_0 \vec{H}) = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = \{ j = 0 \} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} =$$

$$= -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

В итоге получаем:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = 0, \text{ где } c^2 = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad n = \sqrt{\epsilon \mu}, \quad c = \frac{c_0}{n} \leftarrow \text{показатель преломления среды}$$

↑ в вакууме скорость света в вакууме

10) Шкала эл-х волн. Длина волны в видимой части спектра, инфракрас-е и ультра-е
сотовой связи

(11) Поперечность электромагнитных волн в свободном пространстве, как $\Rightarrow$ упр-е Максвелла

Ориентированности векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$

Рассм. решение волнового уравнения в виде м-й волн: $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_0 x \cdot e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x - k_y y - k_z z)} = E_x \cdot (-ik_x)$$

...

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = E_z (ik_z)$$

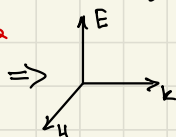
$$\text{div } \vec{E} = -i(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = -i(\vec{k}, \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

Аналогично: $\vec{k} \perp \vec{H}$ ($\Rightarrow$ из $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0$)

Рассм. вз-ю ориентации векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ м-й эл-й волны.

$$\text{rot } \vec{E} = -i[\vec{k}, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \mu_0 \vec{H} \Rightarrow [\vec{k}, \vec{E}] = \omega \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{k}, \vec{E}, \vec{H} \text{ образуют прав. в 3-ч}$$

без док-ва



$$kE = \omega \mu_0 H; \quad \frac{\omega}{c} E = \omega \mu_0 H \Rightarrow E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mu_0 H$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \Rightarrow E = ZH$$

Импеданс: хар-а среды

(12) Энергия электромагнитной волны. Ур-е Максвелла плотность потока энергии, объемная плотность энергии интенсивность излучения. Солнечный свет - а

Эн-я хар-а волны: для этого рассмотрим:

$$\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \mu \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) =$$

$$= -\mu \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\mu \mu_0}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\epsilon \epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial t}, \text{ где } \omega = \frac{1}{2} (\mu \mu_0 H^2 + \epsilon \epsilon_0 E^2)$$

$\int [\vec{E}, \vec{H}] = S$, тогда получим: $\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} S = 0$ - закон сохранения;

$[\omega] = \frac{\text{А} \cdot \text{С} \cdot \text{Волн}^2}{\text{Волн} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{Ватт} \cdot \text{С}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{С}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$

ω - объемная плотность энергии

$[S] = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

S - плотность потока энергии

Проникн-е по заданному V эс.

$$\iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iiint_V \operatorname{div} S dV = \left\{ \iiint_V \operatorname{div} S dV = \oint_S S d\vec{\sigma} \right. ; \left. \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \omega dV = \frac{\partial W}{\partial t} \right\} =$$

$$= \frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S S d\vec{\sigma}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$$

Получим связь между ω и S

$$\omega = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \frac{E^2}{Z^2} + \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \epsilon \epsilon_0 E^2$$

$$S = EH = \frac{E^2}{Z} = \frac{E^2 \sqrt{\epsilon \epsilon_0}}{\sqrt{\mu \mu_0}} = C \cdot E^2 \epsilon \epsilon_0 = C \cdot \omega$$

Интенсивность $I = \langle S \rangle_t = C \epsilon \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_t = \frac{1}{2} C \epsilon \epsilon_0 E_0^2$

Фотон: $\epsilon = \hbar \omega = \hbar \frac{2\pi}{T} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$

$\rightarrow P = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{cT} = \frac{h\omega}{c} \quad \leftarrow \text{энергия фотона}$

импульс фотона.

Фотон - минимальная порция энергии передаваемая эл-м/мгн-т полем

Нельзя передать энергию волной или порцию энергии < порции энергии фотона

Свет взаимодействует с вещ-ми на уровне атомов или молекул и поэтому это описать можно Фотон

13

14) Энергетический баланс солн-о из-я в атмосфере. Парниковый эффект

Земля не обладает источником энергии
Солнце - огромный термоядерный реактор (источник энергии)

Суть теплового баланса Земли в том, что Земле отдает фотоны столько энергии, сколько поглощает, т.е. если бы Земля отдавала меньше, то она бы нагревалась, отдавала бы больше - остывала

Формула Планка: описывает излучательную способность абс. черного тела

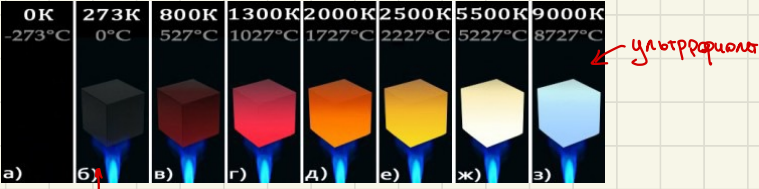
$$W_\omega = \frac{h\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\frac{h\omega}{kT}) - 1}$$
 Формула утв: Излучательная способность зависит от темпер-ы. Т.е. чем выше T, тем больше излучает!!!

$$[W_\omega] = \frac{Вт}{м^2 \cdot Гц}$$
 показывает, как объемная плотность энергии излучается на единицу длины волны

Если формулу Планка проинт-гр по частоте, то res - полная объемная пл-ть энергии.

$S = \sigma T^4$ Связь полной мощности энергии с темп-ой

Формула Стефана - Больцмана
 $\sigma = const = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot K^4}$



инфрак-й
 какое кол-во энергии дает нам Солнце?

$S \approx 1,57 \cdot 10^3 \frac{Вт}{м^2}$ На верх. слоех атм.
 Можно рассчитать полную мощность, которую получает Земля от Солнца

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S \cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = S\pi R^2$$

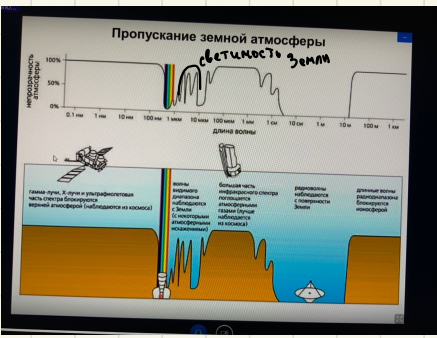
$$P = S\pi R^2 (1 - A)$$

$$I_0 = \frac{S\pi R^2 (1 - A)}{4\pi R^2} = \frac{S(1 - A)}{4}$$
 коэф. Альбеда коэф. отражения $A(\theta; \lambda) \approx 0,3$

$I_T = I_0 = \sigma T_s^4$ $T_s = \sqrt[4]{\frac{S(1-A)}{4\sigma}} \approx 255 K = -18^\circ C$
 газы в атмосфере поглощают тепло, но не излучают в космос

$$I_s = I_T + I_T \cdot \frac{\epsilon}{2} + I_T \cdot \frac{\epsilon^2}{4} + \dots = I_T \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}} = S \frac{1-A}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \Rightarrow T_s = T_s(1 - \frac{\epsilon}{2})^{1/4} \approx 1,14 \approx 290 K$$

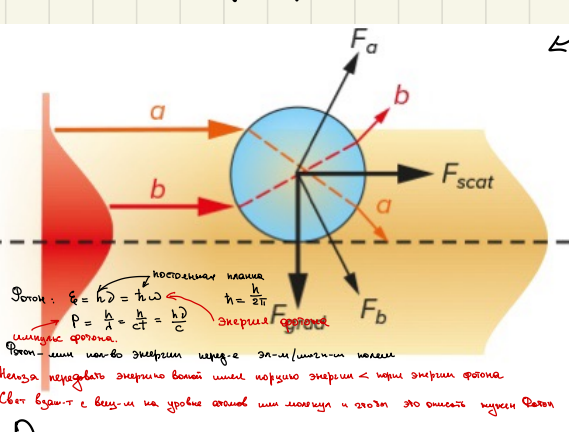
 $\epsilon = 0,8 \approx 17^\circ C$



Остатки: вода, угл-й газ, метан, озон, метан.
 Если A увеличится, то будет от. тепла

15) Давление электромагнитной волны. Волновой механизм возникновения давления.

Фотоэффект - под дей-ем света из металла выбиваются электроны, которые можно измерять. Слабый синий свет выз-т фотоэф., а слаб. красн-й нет, т.к. энергия фотонов син.о света > эн. фот-в красном

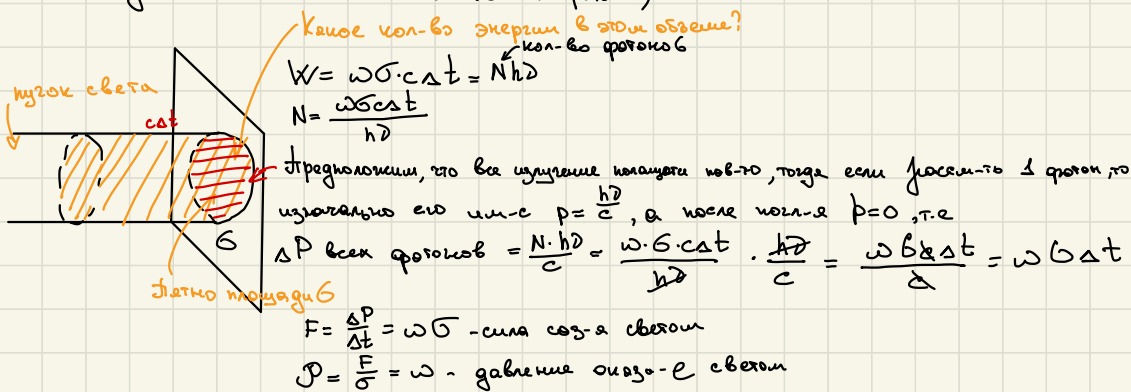


Лазерный пинцет

Любое отклонение капли от равновесного положения приводит к из-то импульса выходящего фотона и из-за закона сохр. имп-ва возникает сила возвращающая каплю в рав-е положение.

Из демонстрации: есть частицы и лазер. Лазер захватывает частицу и удерживает её, если принимать стояние

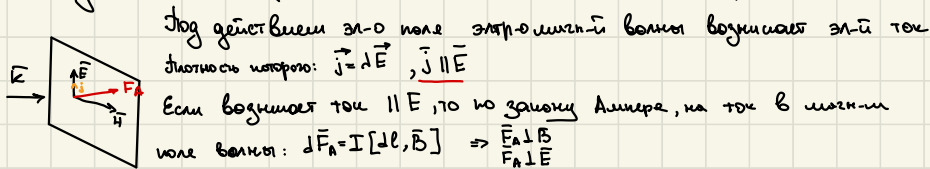
Описание давления света (или волновой механики фотона)



Если поверхность зеркальная, то давление в 2 раза больше

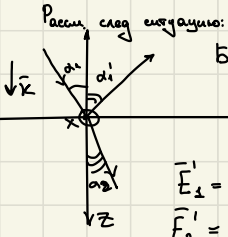
В реальности $P = \omega(1+R)$ коэф. отр-я 0 - полн-е 1 - иде-е зеркало

Описание давления света (с помощью волнового механизма)



16) Нормальное падение электромагнитной волны на границу раздела 2-х сред. Держим и даем волне в 2-х ср-х.

Рассм. след. образом:



Будем считать, что вектор E_1 падающей волны имеет только y -ую компоненту

$$E_1 = E_{10} e^{i(\omega t - k_1 z)} = \begin{cases} \text{т.к. } E \perp k \end{cases} = E_{10} e^{i\omega t} \cdot e^{-i(k_{1y}y + k_{1z}z)} = E_{10} e^{i\omega t} \cdot e^{-i(k_{1z}z)}$$

$$E_1 = E_{10} e^{i\omega t} \cdot e^{-i(k_{1y} \sin \alpha_1 + k_{1z} \cos \alpha_1)}$$

$$E_1 = E_{10} e^{i\omega t} \cdot e^{-i(k_{1x}x + k_{1y}y \sin \alpha_1 + k_{1z}z \cos \alpha_1)}$$

$$E_2 = E_{20} e^{i\omega t} \cdot e^{-i(k_{2x}x + k_{2y}y \sin \alpha_2 + k_{2z}z \cos \alpha_2)}$$

Пр-е упр-а: На границе раздела 2-х сред перп-а $\tan \alpha$ компонент век-ра E

$$E_{1z} + E_{1z}' = E_{2z} \quad (\text{из упр-а continuity})$$

$$E_{1z} = E_1 \cos \alpha_1 \Rightarrow \forall t \Rightarrow \omega_1 = \omega_1' = \omega_2$$

$$\forall x \Rightarrow k_{1x} = k_{2x} = 0$$

Частота не меняется, но длины волн меняются

$$\text{для } z=0 \quad k_{1y} \sin \alpha_1 = k_{1y}' \sin \alpha_1' = k_{2y} \sin \alpha_2$$

$$\text{т.к. } k = \frac{\omega}{c} \quad \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_2 \quad | \cdot \frac{c_0}{\omega}$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad - \text{Закон Снеллиуса.}$$

$$\text{Нормальное падение } \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1' = 0 = \alpha_2 = 0$$

$$\begin{array}{c|c} \text{①} & \text{②} \\ \hline \text{①} & \end{array} \quad \begin{aligned} R &= \frac{E_1'}{E_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} & Z &= \sqrt{\frac{\mu \epsilon_0}{\epsilon \epsilon_0}} & n &= \sqrt{\epsilon \epsilon_0} \\ T &= \frac{E_2}{E_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned}$$

Вывод: $\text{rot } \vec{E} = -i[\vec{k}, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_0 e^{i(\omega t - k z)}) = -\mu \mu_0 H_0 \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t - k z)} = -\mu \mu_0 i\omega H$

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \mu \mu_0 \omega H \Rightarrow k E_0 = \omega \mu \mu_0 H_0 \Rightarrow \frac{\omega}{c} E_0 = \omega \mu \mu_0 H_0 \Rightarrow E_0 = \mu \mu_0 H_0 c$$

$$E_0 = \mu \mu_0 H_0 c \Rightarrow Z_0 = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} H_0 \Rightarrow E_0 = Z_0 H_0$$

$$\text{Пр-е упр-а: } \begin{cases} E_1 + E_1' = E_2 & | : E_1 \\ H_1 + H_1' = H_2 & | : E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{1}{Z_1} + \frac{R}{Z_1} = \frac{T}{Z_2} \end{cases} \quad \text{ЗТЗ}$$

$$\mu \approx 1 \text{ - где не можн-х сред } \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{получим: } \begin{aligned} R &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} & R_I &= \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} & \text{Отк-о инт-н-и} \\ T &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} & T_I &= \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} & \text{в } \Sigma = 1. \end{aligned}$$

$$R_I, T_I \in [0; 1]$$

Если $R < 0 \Rightarrow$ меняется фаза волны или знак поля т.е. $\text{sgn } E_1 \neq \text{sgn } E_1'$

17) Интегральная аналогия в теории волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \xi = 0$$

$$\xi \Rightarrow P, V \leftrightarrow \vec{E}, \vec{H};$$

$$p = Z_{AK} \cdot V$$

$$E = Z_{\partial H} H$$

$$Z = \rho_0 c_0$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}}$$

$$C_{AK} = \frac{1}{\rho_0 \beta}$$

$$C_{\partial H} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$$

$$\omega_{AK} = \frac{1}{2} \rho_0 V^2 + \frac{1}{2} \beta P^2$$

$$\omega_{\partial H} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2$$

$$S_{AK} = PV$$

$$S = C \cdot \omega$$

$$I_{AK} = \frac{1}{2 Z_{AK}} P_0^2 = \frac{Z}{2} V_0^2$$

$$I_{\partial H} = \frac{1}{2 Z_{\partial H}} E_0^2 = \frac{Z}{2} H_0^2$$

$$S_{\partial H} = |\langle \vec{E}, \vec{H} \rangle|$$

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$T = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

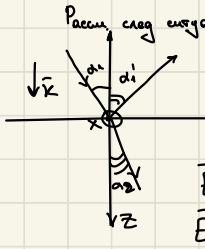
$$\text{Другое}$$

$$\begin{aligned} & \partial n - \alpha \epsilon \quad \mu \approx 1 \Rightarrow Z \propto \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{n} \quad n = \sqrt{\epsilon \mu} \approx \sqrt{\mu} \\ & \left. \begin{aligned} R &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} & R_T &= \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \\ T &= \frac{2 n_1}{n_1 + n_2} & T_T &= \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

18) Закон отражения и преломления

на y

Рассуждение аналогично:



Будем считать, что вектор E_1 падающей волны имеет только x -компоненту

$$E_1 = E_{10} e^{i(\omega_1 t - E_1 \vec{n})} = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } E \parallel k_1 \\ k \in yoz \end{array} \right\} = E_{10} e^{i\omega_1 t} \cdot e^{-i(k_{1y}y + k_{1z}z)} =$$

$$= E_{10} e^{i\omega_1 t} \cdot e^{-i(k_1 y \sin \alpha_1 + k_{1z} \cos \alpha_1)}$$

$$\vec{E}'_1 = \vec{E}'_{10} \cdot e^{i\omega_1 t} \cdot e^{-i(k'_{1x}x + k'_{1y} \sin \alpha_1' + k'_{1z} \cos \alpha_1')}$$

$$\vec{E}'_2 = \vec{E}'_{20} e^{i\omega_2 t} \cdot e^{-i(k_{2x}x + k_{2y} \sin \alpha_2 + k_{2z} \cos \alpha_2)}$$

т.к. рассуждали, что отраж-я волны не зависит от y и z

Прежде всего: на границе раздела 2-х сред выполняется закон сохранения энергии

$$E_{1z} + E'_{1z} = E_{2z} \quad (\text{из нр-а су-и-и границ})$$

$$E_{1z} = E_1 \Big|_{z=0} \Rightarrow \forall t \Rightarrow \omega_1 = \omega_1' = \omega_2$$

$$\forall x \Rightarrow k'_{1x} = k_{2x} = 0$$

Частота не меняется, но длины волн меняются

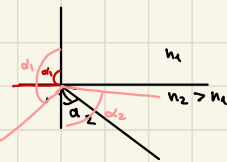
$$\text{при } z=0 \quad k_1 y \sin \alpha_1 = k'_1 y \sin \alpha_1' = k_2 y \sin \alpha_2$$

$$\text{т.к. } k = \frac{\omega}{c} \quad \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c'_1} \sin \alpha_1' \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1'$$

$$\frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_2 \quad | \cdot \frac{c_0}{\omega}$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad - \text{Закон Снеллиуса.}$$

19) Полное внутреннее отражение



$$n_1 \sin \alpha_2 = n_2 \sin \alpha_1$$

$$\alpha_1 > \alpha_2$$

$$\alpha_1 \rightarrow \text{растет}$$

или наоборот α_2 $\alpha_1 = 90^\circ$, т.е. пойдет вдоль границы раздела сред
Если $\alpha_2 > \text{крит.}$ - весь свет будет отражен в среде из которой он пришел

Результат:

$n_2 < n_1$ грани. волновое число при ω волны: $k_z^2 = k_{zx}^2 + k_{zy}^2 = k_{zx}^2 + (k_1 \sin \alpha_1)^2$

$$k_{zx}^2 = k_z^2 (1 - \sin^2 \alpha_2) = \frac{\omega^2 n_2^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1\right)$$

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\alpha_1)_{\text{кр}} = 1 \Rightarrow \sin(\alpha_1)_{\text{кр}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\alpha > \alpha_{\text{кр}} \quad k_{zx} = \pm i \chi_z$$

$$\chi_z = \frac{\omega n_2}{c_0} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha_1 - 1}$$

$$\vec{E}_z = \vec{E}_{z0} e^{i(\omega t - k_{zy} y - k_{zx} z)} \Rightarrow e^{-i(\pm i \chi_z z)} = e^{\mp \chi_z z}$$

$\Rightarrow$ Волна во 2-ю среду все-таки проникает, но эксп-та затухает

$$\text{глубина проник-я: } \delta = \frac{c_0}{\omega} (n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2)^{-1/2} = \frac{d}{2\pi} (n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2)^{-1/2}$$

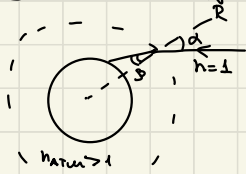
$\Rightarrow$ глубина проник-я имеет порядок d - значит мало

ТВО чтобы зрение спаростей

$$n_1 > n_2; \quad n = \frac{c_0}{c}$$

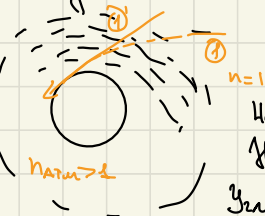
$$\frac{c_0}{c_1} > \frac{c_0}{c_2} \Rightarrow c_1 < c_2$$

② Земная рефракция. Рефракция звука в океане. Подводный звуковой канал.



$n \sin \alpha = n_{\text{атм}} \sin \beta \Rightarrow \beta < \alpha$ 0-е приближение Земной рефракции

Чтобы فهم. явл-ие Земной рефракции можно представить атмосферу на слои:



$\varphi = \langle \textcircled{1}, \textcircled{1} \rangle \approx 4.2 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 0.68^\circ$

На закатах и рассветах мы не можем видеть Солнце по горизонту

Наблюдателю будет казаться, что Солнце в $\textcircled{1}$, хотя по факту оно в $\textcircled{2}$

Угловой радиус Солнца $\varphi_s \approx 9.3 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0.53^\circ < \varphi \Rightarrow$

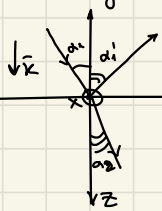
Это означает, что мы видим Солнце на закате/восходе, хотя оно уже за горизонтом.

Подводный звуковой канал

ПВО в акустике:

$n_2 < n_1$ явл-ие. волновое число при α волна: $k_z^2 = k_{zy}^2 + k_{zz}^2 = k_{zy}^2 + (k_1 \sin \alpha)^2$

$k_{zz}^2 = k_z^2 (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{\omega^2 n_1^2}{c_0^2} (1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \alpha)$



$\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\alpha_i)_{\text{кр}} = 1 \Rightarrow \sin(\alpha_i)_{\text{кр}} = \frac{n_2}{n_1}$

$\alpha > \alpha_{\text{кр}} \quad k_{zz} = \pm i \chi_z \quad \chi_z = \frac{\omega n_2}{c_0} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha - 1}$

$\vec{E}_z = \vec{E}_{z0} e^{i(\omega t - k_{zy} y - k_{zz} z)} \Rightarrow e^{-i(\pm i \chi_z z)} \Rightarrow e^{\pm \chi_z z}$

$\Rightarrow$ Волна во 2-ю среду все-таки проникает, но эксп-о затухает

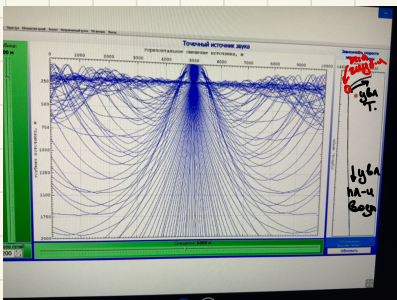
Глубина проник-я: $\delta = \frac{c_0}{\omega} (n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2)^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\pi} (n_1^2 \sin^2 \alpha - n_2^2)^{-1/2}$

$\Rightarrow$ Глубина проник-я имеет порядок λ - значит мало

ПВО с точки зрения скоростей

$n_1 > n_2; \quad n = \frac{c_0}{c}$

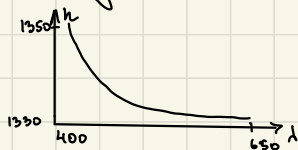
$\frac{c_0}{c_1} > \frac{c_0}{c_2} \Rightarrow c_1 < c_2$



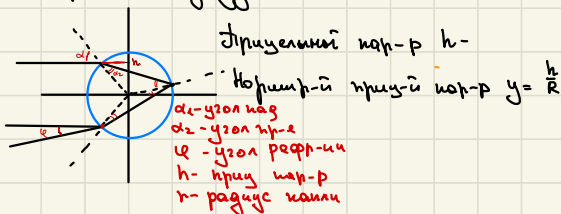
21) Рагуза

рефракция + дисперсия

Рефракция - это изменение пути следования светового луча (или других волн), возникающее на границе разнородных сред или в толще среды с непрерывно меняющейся сво-и



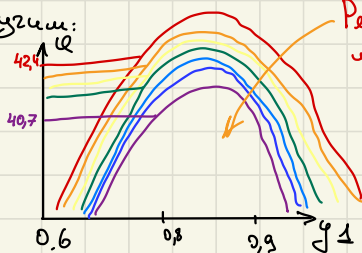
Первичная рагуза



$$\varphi = 4\alpha_2 - 2\alpha_1;$$

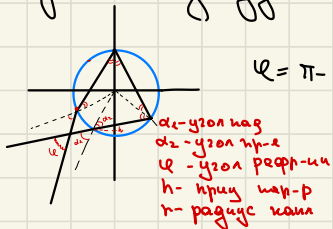
$$\varphi = 4 \arcsin\left(\frac{y}{n}\right) - 2 \arcsin y$$

Получим:

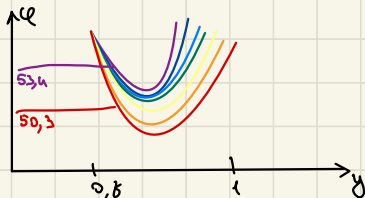


Рядом с max из-за y не сильно
меняет угол, но отдалась или из-за $y \rightarrow$ из угла

Вторичная рагуза:

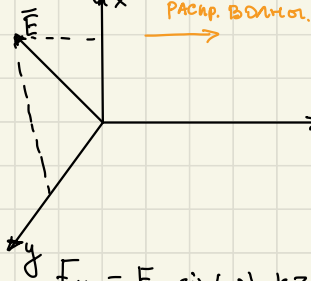


$$\varphi = \pi - 6\alpha_2 + 2\alpha_1 = \pi + 6 \arcsin\left(\frac{y}{n}\right) - 2 \arcsin(y)$$



Юлиан Александр - много область про-ва куда лучи рагузы вообще не попадают

23) Поле $\vec{E}$ и волн, линейная эл-я, круговая пол-я, сст-й свет.



$$① E_x(z,t) = E_1 \sin(\omega t - kz)$$

$$② E_y(z,t) = E_2 \sin(\omega t - kz + \delta)$$

Важно: мы догадываем, что y -я компонента вектора $\vec{E}$ может иметь фазовый сдвиг от E_x .

$$E_y = E_2 \sin(\omega t - kz) \cos \delta + E_2 \cos(\omega t - kz) \sin \delta$$

$$\text{из } ① \Rightarrow \sin(\omega t - kz) = \frac{E_x}{E_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{E_2 \cdot E_x}{E_1} \cos \delta + E_2 \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_1^2}} \sin \delta \quad | E_2$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta$$

$$\frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1} \cos \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta$$

$$\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2 \frac{E_y \cdot E_x}{E_2 \cdot E_1} \cos \delta + \frac{E_x^2}{E_1^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 \sin^2 \delta$$

$$\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - \frac{2 E_y \cdot E_x}{E_2 \cdot E_1} \cos \delta + \frac{E_x^2}{E_1^2} = \sin^2 \delta$$

В общем случае это уравнение эллипса (т.е. концы вектора $\vec{E}$ движутся по эллипсу)

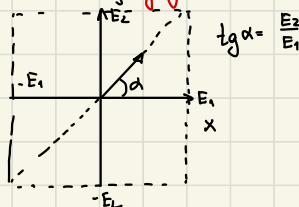
$$\delta = \pi \Rightarrow \sin \delta = 0 \quad \cos \delta = \pm 1$$

Фазовый сдвиг на π объясняется за счет $\omega t - kz$, ссылаясь на kz , или мы помним $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, т.е. при $z = \frac{\lambda}{2}$ мы имеем фазовый сдвиг в π

$$\left(\frac{E_y}{E_2} \pm \frac{E_x}{E_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_1} = \pm \frac{E_x}{E_1}$$

Линейная поляризация

$$\delta = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \cos \delta = 0 \quad \sin \delta = \pm 1$$



$$\frac{E_y^2}{E_2^2} + \frac{E_x^2}{E_1^2} = 1 - \text{Эллипс поляризации}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_y^2 + E_x^2 = 1 \quad \text{Круговая поляризация}$$

Явл-е поляризации довольно искусственно и большинство источников свечения
дает нем поляризованный свет

Деполаризованное излучение - возникает т.к. излучение свет излучается от отдельных атомов
и молекул т.к. их очень много (излучение отдельных атомов/молекул поляризовано), но когда их так много
они все перекрывают и в итоге суммарный свет E ведет себя как unpolarized

24) Отражение и преломление поляризованных волн. Формулы Френеля

$$\left(\frac{E_{от}}{E_{пр}}\right)_\perp = \frac{Z_2 \cos \theta_{пр} - Z_1 \cos \theta_{от}}{Z_2 \cos \theta_{пр} + Z_1 \cos \theta_{от}} = \frac{\cos \theta_{пр} - (\mu_1/\mu_2) \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_{пр}}}{\cos \theta_{пр} + (\mu_1/\mu_2) \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_{пр}}} \quad (16.30a)$$

$$\left(\frac{E_{пр}}{E_{от}}\right)_\perp = \frac{2Z_2 \cos \theta_{пр}}{Z_2 \cos \theta_{пр} + Z_1 \cos \theta_{от}} = \frac{2 \cos \theta_{пр}}{\cos \theta_{пр} + (\mu_1/\mu_2) \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_{пр}}} \quad (16.30b)$$

(справедливы для той волны, что $\perp$ пл-и пад-я $n_1 = n_2 = n$, $n_1 \neq n_2/n_1$ (линей-е или нелиней-е явление) $E \perp$ пл-и паде-я)

$$\left(\frac{E_{от}}{E_{пр}}\right)_\parallel = -\frac{\sin(\theta_{пр} - \theta_{от})}{\sin(\theta_{пр} + \theta_{от})} \quad (16.32a)$$

$$\left(\frac{E_{пр}}{E_{от}}\right)_\parallel = \frac{2 \cos \theta_{пр} \sin \theta_{от}}{\sin(\theta_{пр} + \theta_{от})} = \frac{(n_1/n_2) \sin 2\theta_{от}}{\sin(\theta_{пр} + \theta_{от})} \quad (16.32r)$$

А.Н. Матвеев «Оптика»

Эти формулы применимы для 2-х сл-в:
 Направление падающего луча и пер-я и тран-я
 в точке падения задают пл-ть (пл-ть падения)
 пад-й отр-и и прел-й лучи $\in$ пл-и падения
 Z - вдоль пад-о луча
 X - внутри пл-и а $y \perp$ пл-и пад-я

Волна в том случае
 если E пер- в пл-и паде-я

25) Угол Брюстера

$$\left(\frac{E_{от}}{E_{пр}}\right)_\perp = \frac{Z_1 \cos \theta_{пр} - Z_2 \cos \theta_{от}}{Z_1 \cos \theta_{пр} + Z_2 \cos \theta_{от}} = \frac{(\mu_1/\mu_2) n_2^2 \cos \theta_{пр} - \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_{пр}}}{(\mu_1/\mu_2) n_2^2 \cos \theta_{пр} + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_{пр}}} \quad (16.42a)$$

$$\left(\frac{E_{пр}}{E_{от}}\right)_\perp = \frac{2Z_1 \cos \theta_{пр}}{Z_1 \cos \theta_{пр} + Z_2 \cos \theta_{от}} = \frac{2n_1 \cos \theta_{пр}}{(\mu_1/\mu_2) n_2^2 \cos \theta_{пр} + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_{пр}}} \quad (16.42b)$$

$$\left(\frac{E_{от}}{E_{пр}}\right)_\parallel = \frac{\sin 2\theta_{пр} - \sin 2\theta_{от}}{\sin 2\theta_{пр} + \sin 2\theta_{от}} = \frac{\tan(\theta_{пр} - \theta_{от})}{\tan(\theta_{пр} + \theta_{от})} \quad (16.43a)$$

$$\left(\frac{E_{пр}}{E_{от}}\right)_\parallel = \frac{4 \cos \theta_{пр} \sin \theta_{от}}{\sin 2\theta_{пр} + \sin 2\theta_{от}} = \frac{2 \cos \theta_{пр} \sin \theta_{от}}{\sin(\theta_{пр} + \theta_{от}) \cos(\theta_{пр} - \theta_{от})} \quad (16.43b)$$

имеет ос-ю точку
 $\exists$ кон-я когда числ-е не отр-е а все ух-дет во 2-й среде

$$R_\parallel = \frac{\tan(\theta_{от} - \theta_{пр})}{\tan(\theta_{от} + \theta_{пр})}$$

$$\exists \theta_{от} + \theta_{пр} = \frac{\pi}{2}$$

из закона Снел-а: $n_1 \sin \theta_{от} = n_2 \sin \theta_{пр}$

$$n_1 \sin \theta_{от} = n_2 \cos \theta_{от}$$

$$\tan \theta_{от} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{Угол Брюстера})$$

Эффект Брюстера - отсутствие отр-о света для изл-е с отр-е поляризации

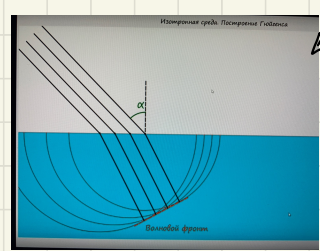
Граница раздела 2-х сред имеет свой показатель

т.е если на границу раздела 2-х сред под углом Брюстера падает диам-й свет, то отражается линейно полар-й.

26) Построение Гюйгенса для волнового фронта. Распр-е элек-х волн в кристаллах. Двупреломление

Гюйгенс предложил след-ий способ описание распространения волн которое состоит в том, что моделируется каждая тл-я волна (плоский волновой фронт) из него выделен кусок (кружечка в данном строении) и эти куски в какой-то момент достигают фронта 2-х сред.

Само построение: каждому точке волнового фронта считается источником 2-й сферич-й волн потом строится их огибающая и это есть волново-й фронт



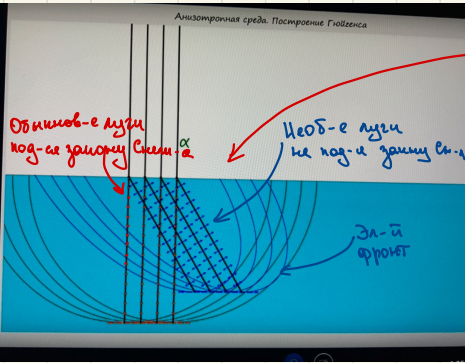
Пример для изотропной среды

Анизотропная среда - это среда в которой скорость распр-е волн зависит от напр-е в котором волн распр-е в среде

к примеру кристалл

Эффект дубляж при-е когда на вход анизотропной среды приходит

один луч, а выходит 2 луча у 2-х изл-й линейных взаимно перпендикулярных



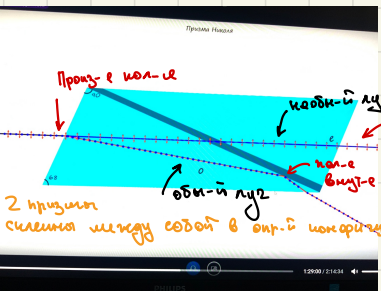
Обыкновен-е лучи под-е закону Снелла
Необ-е лучи не под-е закону Снелла
Эл-й фронт

поляризация обыкновенного луча перпендикулярна направлению распространения
а необыкновенного луча лежит в направлении

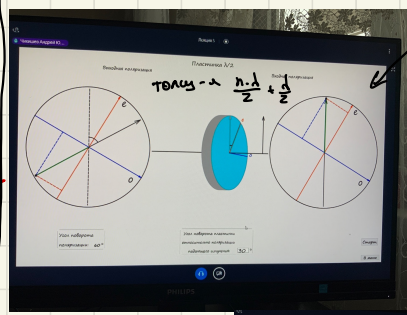
Обыкновенный луч имеет большую скорость чем необыч-й луч $\Rightarrow$ возник разовый сдвиг $\Rightarrow$ можно поворачивать пол-ю или менять ее вид.

Тнастична крота $\frac{1}{2}$

Пример первого поляризатора



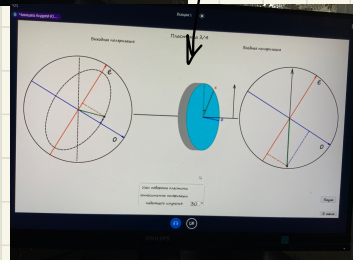
2 кристалла склеены между собой в опр-й ориентации



Разовый сдвиг в π поворот напр-е и полар-из

из линейной в эл-ную

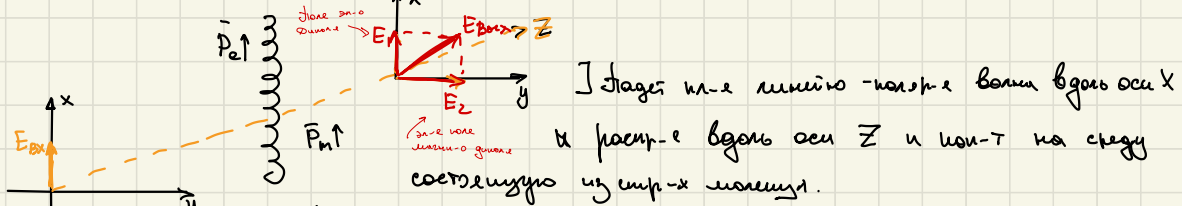
Тнастична крота $\frac{1}{2}$



27) Оптическая активность и круговой дихроизм

Эффект оптической активности (раствор сахара в воде) -

когда на выходе из оптич. актив. среды измеренное φ -е поворачивается на φ по отношению к оптич. активной среде - хиральное средо - средо состоящее из молекул имеющих $\exists$ в 2-х зеркальн-х вариантах ($\begin{smallmatrix} A \\ \diagdown \end{smallmatrix} B; B \begin{smallmatrix} A \\ \diagup \end{smallmatrix} C$) (спиральное молекулы)



Из-за действия ЭМ волн, электр. части которой, вызывает движение в этой структуре заряженных частиц (например e^-) эти электроны под действием волн (поле которой вдоль x) колеблются осциллируют вдоль Ox но это спиральное это приводит к тому, что в этой молекуле возникают 2 дипольных момента, один дипольный момент - электрический, т.е. структура спиральной по отношению к электрическому полю.

Из-за колебаний электронов в направлении $\perp$ электрическому полю возникает магнитный дипольный момент. Эти два дипольных момента излучают 2-ю волну.

и поле E_1 в этой волне имеет электрический дипольный момент, т.е. структура спиральной по отношению к электрическому полю. Эти два дипольных момента излучают 2-ю волну и поле E_1 в этой волне имеет электрический дипольный момент.

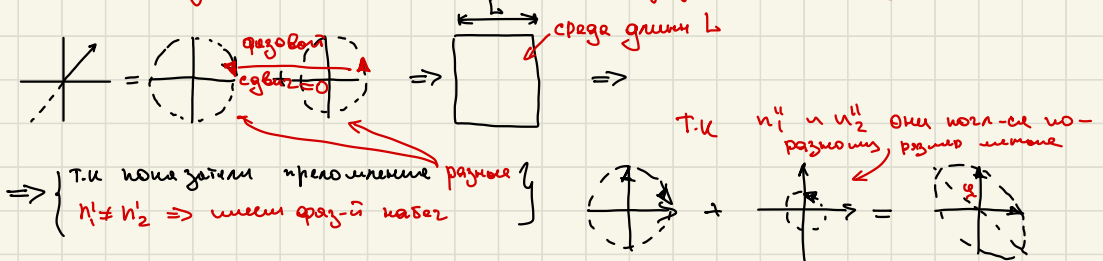
Эффект кругового дихроизма

$$n = n' + i n'' \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{\omega}{c_0} (n' + i n'')$$

$$e^{ikz} = e^{\frac{i\omega n' z}{c_0}} \cdot e^{-\frac{\omega n'' z}{c_0}} \quad \text{— расстр-е вдоль } z$$

чистое затухание

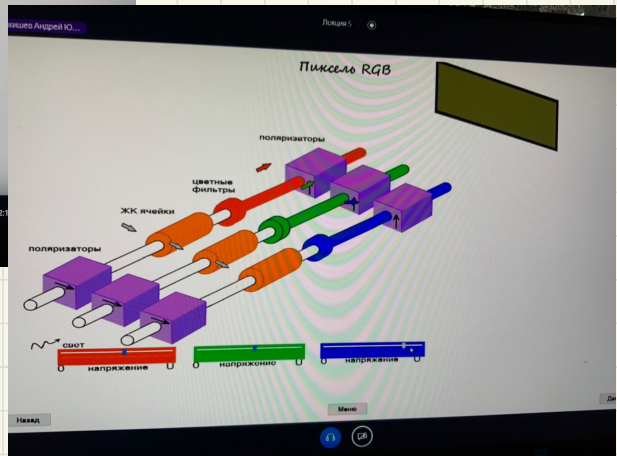
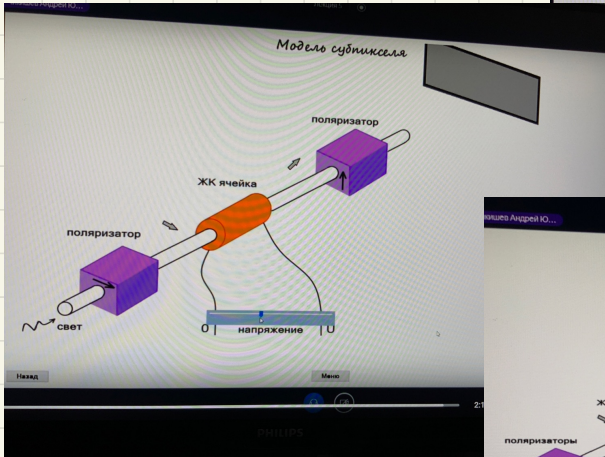
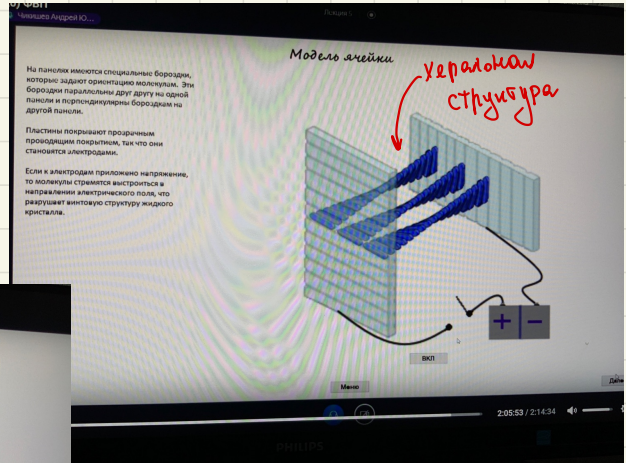
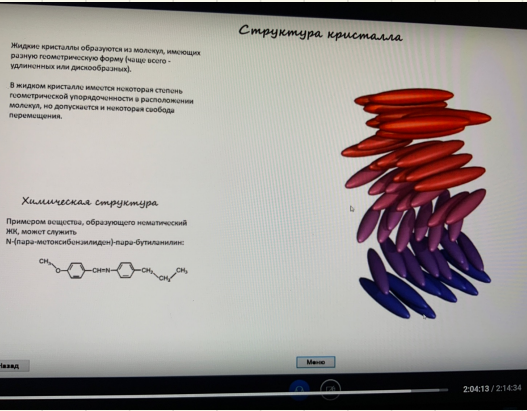
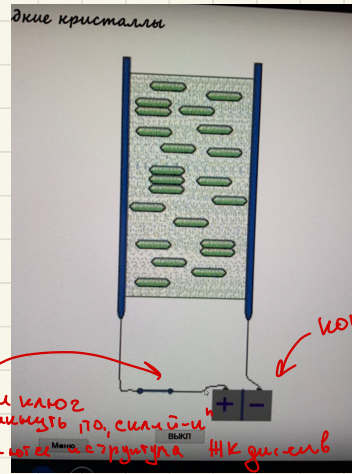
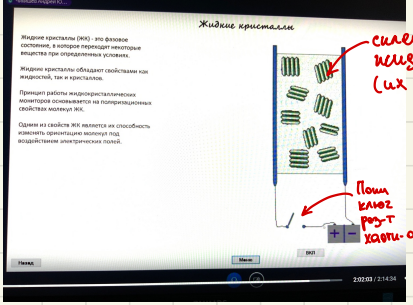
Мнимая часть показателя преломления обеспечивает экспон. затухание волн в среде



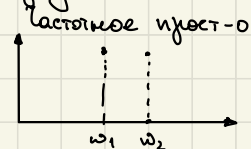
Если приблизительно n'' , то эффект кругового дихроизма оптически неактивен

$$\Delta \varphi = \frac{\omega L}{c_0} \Delta n''$$

28) Принцип работы ЖК Диевнев



29) Способы передачи информации волной. Биемие, амплитудная модуляция, частотной емие сигнала с амплитудной модуляцией по ири-у закону. Модуляция радиосигнала в АМ и FM дуаказ-х.



$$\begin{aligned} \xi(x_0, t) &= a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t = \\ &= 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2a \cos(\omega_M t) \cdot \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

ω_0 - несущая частота

ω_M - модуляционная частота

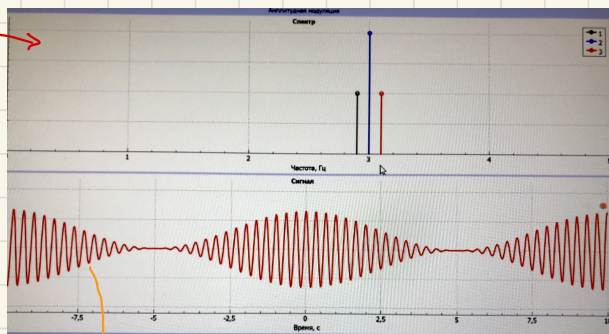
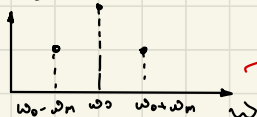


Вобщем случае $\xi(t) = a(1 + m \cos \omega_M t) \cos(\omega_0 t) =$

m - глубина модуляции $m \in [0; 1]$

Хорошо когда $\omega_M \ll \omega_0$

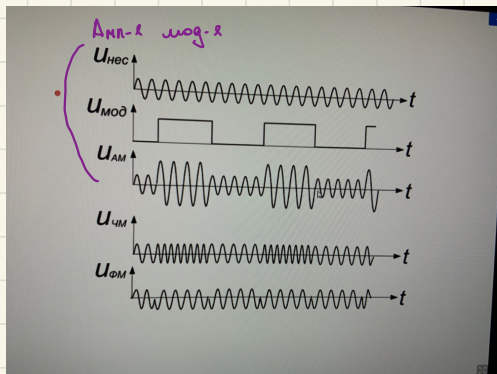
$$= a \cos \omega_0 t + \frac{am}{2} \cos(\omega_0 - \omega_M)t + \frac{am}{2} \cos((\omega_0 + \omega_M)t)$$



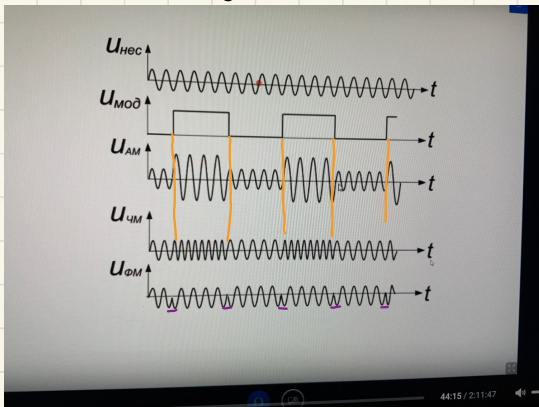
Радиоволны - электромагнитные волны. Характерные частоты $\sim 100 \text{ МГц}$

Видим некоторое высокочастотное колебание модулированное по амплитуде низкочастотным колебанием, принцип модуляции - частота на которой работают передатчик а модуляционная состоит - это и есть акустическое колебание.

Амплитудная модуляция



Частотная модуляция - изменение частоты в нужных интервалах



Минус Ампл-й модуляции:

Большая часть энергии на передачу сигнала требует учета помех, но по факту она несет 0 информации и несет собой горючие помехи

Сигналы плохо защищены от помех
"+": несколько сигналов сразу

Разовая модуляция - в "оконках" - сбиваем фазу -

Радио Диагност	
*длинноволновый диапазон (ДВ)	$\lambda = 735,3 - 2000 \text{ м}$ $\nu = 408 - 150 \text{ кГц}$
*средневолновый диапазон (СВ)	$\lambda = 186,9 - 571,4 \text{ м}$ $\nu = 1605 - 525 \text{ кГц}$
*коротковолновый диапазон (КВ)	$\lambda = 11,4 - 130,4 \text{ м}$ $\nu = 26,3 - 2,3 \text{ МГц}$
*ультракоротковолновый диапазон (УКВ)	$\lambda = 4,11 - 4,56; 2,77 - 3,42 \text{ м}$ $\nu = 73,0 - 65,8; 108 - 87,5 \text{ МГц}$
$\nu = 89,1 \text{ МГц}$	
$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 3,37 \text{ м}$	

Работы не использ-я
они работают на ампл-й модуляции
исп. пилот кр-й волны

исп-т дик-ки

FM-частотно-мод-й сигнал на нем работают почти все без-е станции

30) Суперпозиция эквидистантных гармоник. Квазиуровень сигнала при конечн-м числе гармоник. Теорема о ширине частотн-й полосы

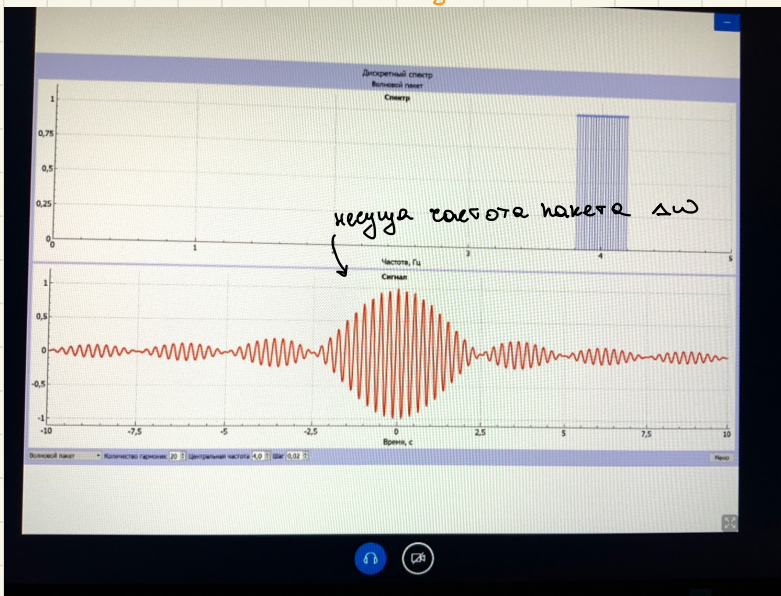


$$\xi(t) = a \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_1 + n\Delta\omega) t \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{N-1}$$

← Волновое пакет (ГРОМ-е процессы)

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \operatorname{Re} a \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_1 + n\Delta\omega)t} = a \operatorname{Re} e^{i\omega_1 t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\omega t} = a \operatorname{Re} e^{i\omega_1 t} \frac{e^{iN\Delta\omega t} - 1}{e^{i\Delta\omega t} - 1} \\ &\equiv a \operatorname{Re} e^{i\omega_1 t} \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\omega t} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\omega t}}{e^{i\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}t}} = a \operatorname{Re} e^{i\omega_1 t} \cdot e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\omega t} \frac{\sin \frac{N\Delta\omega t}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}} \\ &= a \cos\left(\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \cdot \frac{\sin \frac{N\Delta\omega t}{2}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2}} \end{aligned}$$

Ампл-е центр-е Мод-е центр-е



Переход от-е к непрерывн-м гармоникам

Длит. сигнал: чем шире пакет т.е. чем больше $\Delta\omega$, тем короче сигнал и наоборот $\Delta\omega = \text{const}$, а $N \rightarrow \infty$, $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ $T \rightarrow \infty$ т.е.:

Спектр дискретный $\Rightarrow$ сигнал непрер-м
Спектр непрерывн-м $\Rightarrow$ сигнал непрер-м

Если $\xi(t) = \xi(t+T)$, то сигнал можно представить в ряде Фурье

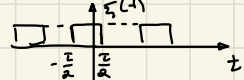
$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

← Присут-е 0-й гармоники (крайние отн-е частоты и других нет)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \cos \omega_n t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \sin \omega_n t dt$$

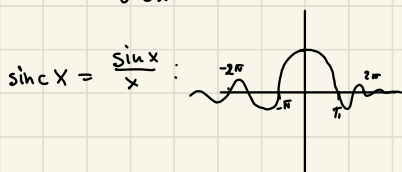
$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\omega_n t} \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} d_n \quad b_n = -2 \operatorname{Im} d_n$$

Пример:  $d_n = \frac{a}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a}{T} \frac{(-1)}{i\omega_n} \left(e^{-i\omega_n \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega_n \frac{\tau}{2}} \right) =$

$$= \frac{a(-1)\tau}{T} \frac{1}{i\omega_n \tau} \left(-2i \sin \frac{\omega_n \tau}{2} \right) = \frac{a\tau}{T} \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} = \frac{a\tau}{T} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega_n \tau}{2} \right)$$

Норм: $\frac{2\pi n}{\tau}$



Разрывные функции плохо представляются конечным числом гармоник. В разрывах возникают осцилляции, они исчезнут только при ∞ или гармоник (лимит ряда Фурье).

Если сигнал не периодичен, то его спектр $S(\omega)$ - непрерывен.

и выглядит так:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{— прямое преобразование}$$

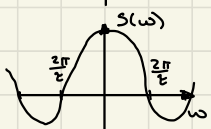
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{— обратное}$$

Пример:



$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{2\pi i\omega} \left(-2i \sin \frac{\omega \tau}{2} \right) = \frac{a\tau}{2\pi} \text{sinc} \frac{\omega \tau}{2}$$

$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi \Rightarrow \Delta\omega \tau \approx \text{const}$
нашли на теореме о ширине частотной полосы



Формулировка: длительность импульса (сигнала) обратна ширине его спектра

Свойство преобразования Фурье: **3.5 Билет:**

① $\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$

$\xi_3(t) = \alpha_1 \xi_1(t) + \alpha_2 \xi_2(t)$

$\xi_3(t) \leftrightarrow S_3(\omega) = \alpha_1 S_1(\omega) + \alpha_2 S_2(\omega)$

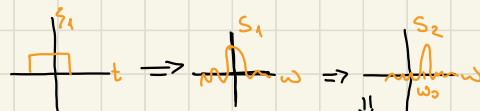
② $\xi_2(t) = \xi_1(t + t_0)$

$S_2 = S_1(\omega) \cdot e^{i\omega t_0}$ $\Delta\varphi = \omega t_0$

фазовый сдвиг

③ $S_1(\omega) \leftrightarrow \xi_1(t)$

$S_2(\omega) = S_1(\omega - \omega_0) \Rightarrow \xi_2(t) = \xi_1(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$



④ $\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$

$\xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$

$\xi_1(t) \otimes \xi_2(t) \leftrightarrow S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\theta) S_2(\omega - \theta) d\theta$

свертка спектров

Один-и-тот-же импульс, который можно использовать для передачи инф.

Теорема о ширине частотной полосы: $\Delta\omega T \geq \text{const}$

Импульсы одинаковой длительности могут иметь спектр разной ширины

$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2$ $[G] = \frac{Вт}{Гц}$ - Спектральная плотность мощности (кол-во мощ-ти приходящ. на единицу част-й шир-ны)

$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$ - экв в врем-м и р-е и частотном

Полная энергия

Теорема Планшереля

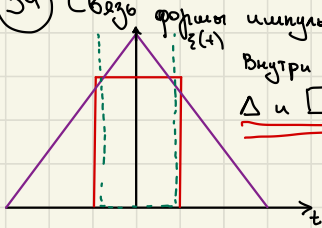
Как посчитать длительность сигнала?

$\xi = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} |z(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt} \in (0, 1)$ } ξ - дл-та энергии сигнала
 Задача найти нужный инт-л числ-л, чтобы $\xi \rightarrow 1$, тогда $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ - и будет длительностью

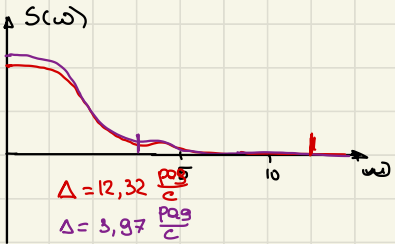
$\xi = \frac{\int_0^{\Delta} |S(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega}$ ищем Δ частотный интервал
отриц-е частоты не фигурируют

34

Связь формы импульса и ширины спектра



Внутри 95% энергии $\Leftrightarrow \xi = 0,95$
 Δ и $\square$ имеют одну дл-ту (в. важно)

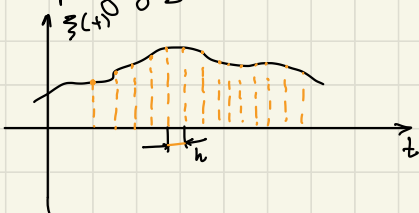


$\Rightarrow$ Спектр $\square >$ спектра Δ

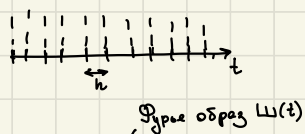
Заключение: спектр тем шире, чем менее гладкой збл функ-ия импульса

Разрывность функ-ии или ее производной приводит к увл. ширине спектра

37) Формула дискретного преобразования Фурье. Выбор шага сетки и интер-периодизации



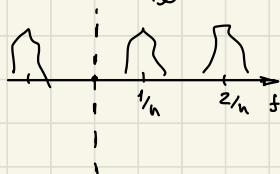
$z(t) \Rightarrow z(jh) \equiv z(j)$ Дельта функ-я
 $\mathcal{L}\{z(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t-jh)$ - Преобразование Дирака



$z(j) = z(t) \cdot \mathcal{L}\{z(t)\} \cdot h$
 Какой спектор имеет $z(j)$
 $z(j) \Rightarrow S_h(s)$

По теореме о свертке: $S_h(s) = S(s) \otimes \tilde{\mathcal{L}}(s) \cdot h$
 $\tilde{\mathcal{L}}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-i s \frac{2\pi}{h} n} = \sum d_n e^{-i \frac{2\pi}{h} n t}$
 $d_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta(t-jh) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{h} n t} dt = \frac{1}{h} e^{-i \frac{2\pi}{h} n j h} = \frac{1}{h}$
 $\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s - \frac{n}{h}) \frac{1}{h}$ по свойс-ву Д-функции
 $S_h(s) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \sum \delta(s - \frac{n}{h} - v) \frac{1}{h} dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(s - \frac{n}{h})$

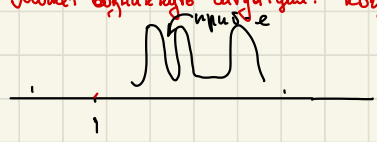
$T = \frac{1}{h}$



$f_N = \frac{1}{2h}$ - частота Найквиста та частота, это полностью задается

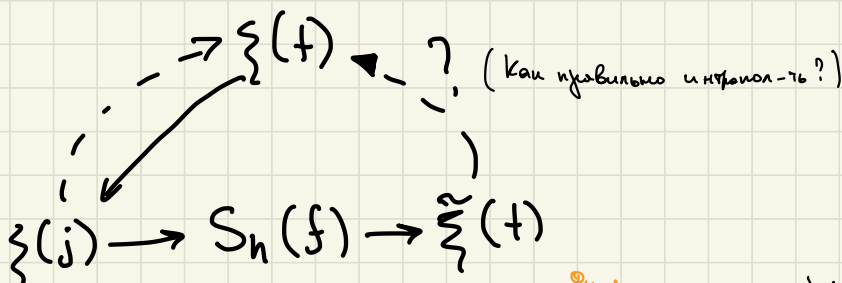
сеткой.

Может возникнуть ситуация: когда частота "звездает" на частоту Найквиста



Это значит, что сигнал имеет короткую длительность t по теореме
 о ширине част-й полосы, а частота Найквиста достаточно мала $\frac{1}{2h} \Rightarrow$
 h достаточно велик $\Rightarrow$ ШАП ПО ВРЕМЕНИ СЛИШКОМ БОЛЬШОЙ

38) Восстановление сигнала по его дискретным отсчетам. Формула Котельникова-Шеннона.



$S(f) \Rightarrow f_{\max} \cdot f_N$ (или правильно выбрать) $\Rightarrow S(f) = S_h(f) \cdot \Pi(f)$, где $\Pi(f) = \begin{cases} 1, & f \in [f_N; f_N] \\ 0, & |f| > f_N \end{cases}$
 $\tilde{z}(t) = \mathcal{F}(S_h(f) \Pi(f)) = \{ \text{по т. о свертке} \} = z(j) \otimes \Pi(f)$
 ↑ Фурье образ ↑ Фурье образ ↑ Вырезаем 1T

$\omega = 2\pi f !!$
 $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(f) e^{i2\pi f t} df = \int_{-f_N}^{f_N} e^{i2\pi f t} df = \frac{1}{i2\pi t} (e^{i2\pi f_N t} - e^{-i2\pi f_N t}) = \frac{1}{i2\pi t} 2i \sin(2\pi f_N t) =$
 $= \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{h} = \frac{1}{h} \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{h}\right)$

$\tilde{z}(t) = \Pi(t) \otimes z(j)$

$z(j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(t - jh) \cdot h$

$\tilde{z}(t) = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \text{sinc}\left(\frac{\pi \theta}{h}\right) z(t - \theta) \delta(t - jh - \theta) d\theta = \{ \theta = t - jh \} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} z(jh) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - jh)}{h}\right) =$

$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} z(jh) \frac{\text{sinc}\left(\frac{\pi(t - jh)}{h}\right)}{\frac{\pi(t - jh)}{h}}$

← Формула Котельникова-Шеннона

Интерполяционный теорем. если удалось отсигуровать сигнал без искажений (т.е без наложения в спек-м пространстве), то тогда мы можем восстановить конт-ную функ-ию $z(t)$ или ее дискретное зное в точках $\{jh\}$

Оценим: как выбрать шаг сетки?

Оценим ширину спектра через теорем о ширине кол-й полос:

$\Delta \omega \tau \approx 3.7$
 $\Delta f \tau \approx \frac{3.7}{2\pi} \approx \frac{1}{2}$
 $\tau = 1c \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{2} \Gamma_3 \Rightarrow f_N = 5\Delta f = \frac{5}{2} \Gamma_3$
 $\frac{1}{2h} = \frac{5}{2}c \Rightarrow h = \frac{1}{5}c \Rightarrow N=5$

полосы f_N - ширина спектра

$\Delta \omega \tau \approx 12$
 $\Delta f \cdot \tau \approx \frac{12}{2\pi} \approx 2$
 $\tau = 1c \Rightarrow \Delta f \approx 2 \Gamma_3 \Rightarrow f_N = 5\Delta f = 10 \Gamma_3$
 $\frac{1}{2h} = 10 \Gamma_3 \Rightarrow h = \frac{1}{20}c \Rightarrow N=20$

Численное Фурье-преобразование

$$\zeta(j) = \sum_{n=0}^N S(n) W_N^{nj}$$

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \zeta(j) W_N^{-nj}$$

$$W_N = \exp(i \frac{2\pi}{N})$$

1) Определить сигнал

2) Определить частоту

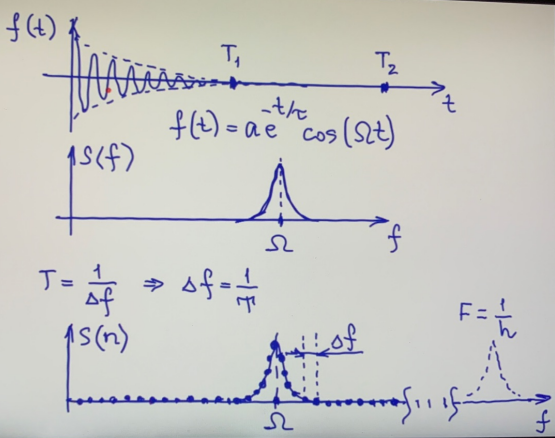
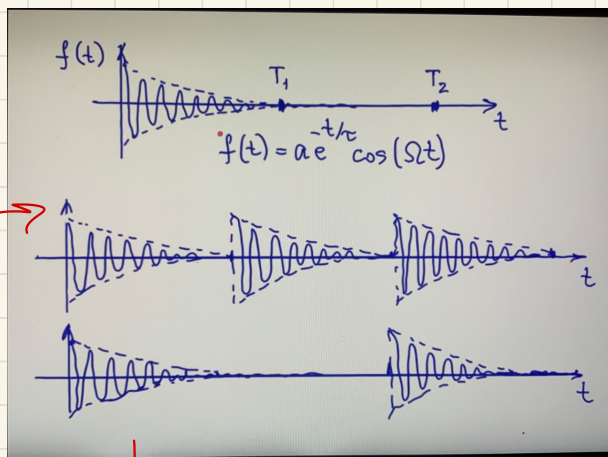
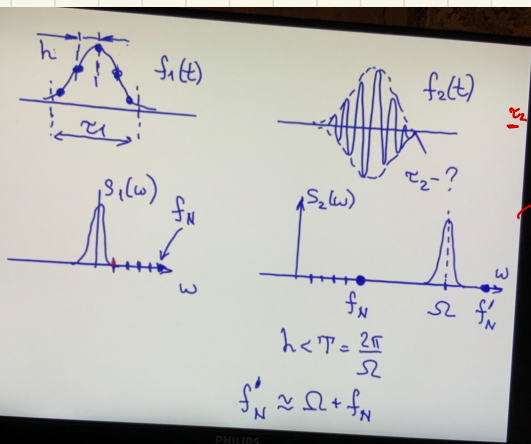
$$\zeta(t) \rightarrow \zeta(j) \equiv \zeta(jh)$$

$$S(f) \rightarrow S(n) = S(n \Delta f)$$

$$F = \frac{1}{h}$$

$$T = \frac{1}{\Delta f}$$

$$N = \frac{T}{h} = \frac{F}{\Delta f} = \frac{1}{h} : \frac{1}{T} = \frac{T}{h}$$



39

40) Групповая и фазовая дисперсия. Формула Рэлея

$$\xi(x, t) = a_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

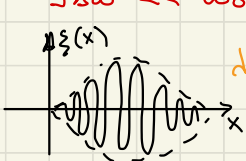
$$\omega t - kx = \text{const} = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)$$

$$\omega \Delta t - k \Delta x = 0$$

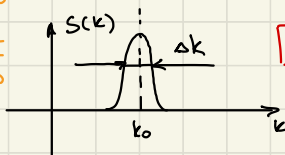
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = v_{\text{ф}} \text{ (фазовая c.)}$$

$$v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}(\omega) \quad v_{\text{ф}} = v_{\text{ф}}(k) \leftarrow \text{Фазовая скорость}$$

$$\Delta \omega \ll \omega_0 \quad \Delta t = t_0 \leftarrow \text{Фикс. время.}$$



$$\lambda_0 \rightarrow k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$



$$\Delta k \ll k_0$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{\text{ф}}} = \frac{\omega k_0}{c_0}$$

$$n = n(\lambda) \Rightarrow n(k)$$

$$v = v(\omega)$$

$$\omega = \omega(k)$$

дисперсионное соотношение

$$n = n(\omega)$$

НАЛИЧИЕ ТАКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПОВОДИТ О НАЛИЧИИ ДИСПЕРСИИ
 $\omega \approx \Omega$ - временная дисперсия (когда частота волны ω близка к нек-й харак-ти для среды)
 $\lambda \approx L$ - пространственная дисперсия (когда длина волны близка к масштабу среды)

без $v_{\text{г}}$ и $v_{\text{ф}}$

$$v_{\text{г}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} \quad \omega = v_{\text{ф}}(k) \cdot k$$

$$v_{\text{г}} = \frac{\partial}{\partial k} (v_{\text{ф}}(k) \cdot k) = v_{\text{ф}} + k \frac{\partial v_{\text{ф}}}{\partial k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda}{k} \right) = -\frac{\lambda^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$v_{\text{г}} = v_{\text{ф}} + k \left(-\frac{\lambda^2}{k^2} \right) \frac{\partial v_{\text{ф}}}{\partial \lambda} = v_{\text{ф}} - \lambda \frac{\partial v_{\text{ф}}}{\partial \lambda}$$

Формула Рэлея

41. Первое приближение теории дисперсии. Волновой пакет. Групповая скорость
Уравнение переноса для огибающей пакета. Бегущее время.

$$\xi(x, t) = a_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

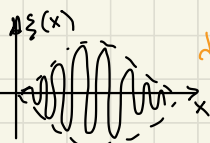
$$\omega t - kx = \text{const} = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)$$

$$\omega \Delta t - k \Delta x = 0$$

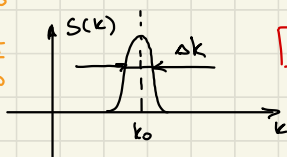
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = V_{\text{гф}} \quad (\text{равенство } \text{---})$$

$$V_{\text{гф}} = V_{\text{гф}}(\omega) \quad V_{\text{гф}} = V_{\text{гф}}(k)$$

$$\Delta \omega \ll \omega_0 \quad \Delta t = t_0 \quad \leftarrow \text{фич. время.}$$



$$a_0 \rightarrow k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$



$$\Delta k \ll k_0$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_{\text{ф}}} = \frac{\omega k}{c_0}$$

$$n = n(\lambda) \Rightarrow n(k)$$

$$k = k(\omega)$$

$$n = n(\omega)$$

$$\omega = \omega(k)$$

$$f(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)} dk$$

Разложим $\omega(k)$ в ряд:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} \Delta k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} (\Delta k)^2 + \dots + \text{дрингберген}$$

$$-kx = -kx + k_0 x - k_0 x = -k_0 x - \Delta k x$$

Итого нам пакет в спектре про-е имеет вид:

$$f(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i(k(\frac{\partial \omega}{\partial k} t - x))} dk$$

$$k_0 - \Delta k$$

огибающая расн-е в пр и вр со скоростью

$$V_{\text{гф}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} - \text{групповая скорость} \leftarrow$$

$$\text{и } \Delta V_{\text{гф}} = \text{const,}$$

$$F(x, t) = a(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

Первое приближение теории дисперсии

Безугловое время

$$a(x, t) = f(v_{zp} \cdot t, x)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v_{zp} \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad \leftarrow \text{уравнение переноса} \Leftrightarrow \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{v_{zp}} \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

$$x = x' \quad \eta = t - \frac{x}{v_{zp}} \quad \leftarrow \text{безугловое время системы координат, движущейся с постоянной скоростью}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{v_{zp}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x'} - \frac{1}{v_{zp}} \frac{\partial a}{\partial \eta} + \frac{1}{v_{zp}} \frac{\partial a}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial x'} = 0$$

Связь v_{zp} и v_{φ}

$$v_{zp} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \quad \omega = v_{\varphi}(k) \cdot k$$

$$v_{zp} = \frac{\partial}{\partial k} (v_{\varphi}(k) \cdot k) = v_{\varphi} + k \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2\pi}{k} \right) = -\frac{2\pi}{k^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$v_{zp} = v_{\varphi} + k \left(-\frac{d^2}{2\pi} \right) \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \lambda} = v_{\varphi} - \lambda \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \lambda}$$

Вывод формулы-от Рэлея

$$n = n(\lambda) \quad n = n(\omega)$$

$$v_{\varphi} = \frac{c_0}{n}$$

$$v_{rp} = v_{\varphi} - \lambda \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \lambda} = \frac{c_0}{n} - \lambda c_0 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{c_0}{n} - \lambda c_0 \left(-\frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) = \frac{c_0}{n} \left(1 + \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)$$

$$v_{rp}^{-1} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \left\{ k = \frac{n(\omega) \cdot \omega}{c_0} \right\} = \frac{n}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \frac{\partial n}{\partial \omega}$$

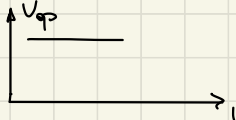
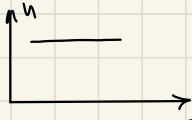
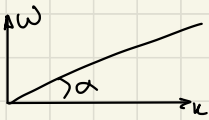
$$v_{rp} = \frac{c_0}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Плотность
вывод от
показателя
преломления

Еще про дисперсию

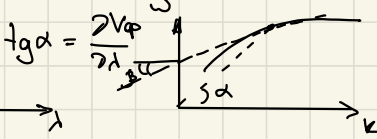
$$V_{\varphi} = \text{const}, \text{ то } \omega = V_{\varphi} k$$

$$n = \frac{c_0}{V_{\varphi}} = \text{const} \quad V_{\varphi} = \frac{c_0}{n} = V_{\varphi} \Rightarrow \text{отсутствие дисперсии}$$

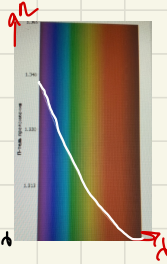
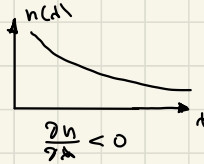


Нормальная дисперсия: $\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \lambda} > 0$, тогда $V_{\varphi} = V_{\varphi} - \lambda \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \lambda}$

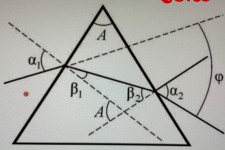
$$V_{\varphi} < V_{\varphi}$$



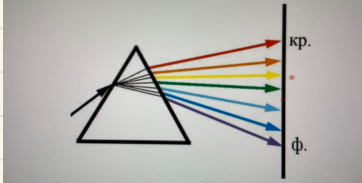
$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= V_{\varphi} \\ \text{tg } \beta &= V_g \end{aligned}$$



Призма отклоняет в сторону основания



т.к. у фиолетовый свет больше то:

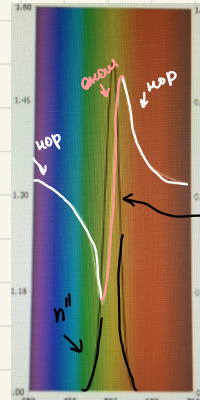


Аномальная дисперсия: средот у которых $n'' \neq 0$ и $\frac{\partial n'}{\partial \lambda} > 0$

$$n(\lambda) = n' - i n''$$

$$e^{i k x} = e^{-\frac{\omega n''}{c_0} x} = e^{-i \frac{\omega n'}{c_0} x} \cdot e^{-\frac{\omega n''}{c_0} x} \quad n'' \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial n'}{\partial \lambda} > 0$$

Обращивает: фазовые носом
Обращивает: полн-е волнот средот



Оз высокое погло-не

42) Роторе приближение теории дисперсии. Расплывание волнового пакета. Параб-е ур-е

дисперсии для амплитуды. Решение для Гауссовского импульса

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \leftarrow \text{Параб-е ур-е}$$

$x, t \Rightarrow x', \eta$:

$$\frac{\partial a}{\partial x'} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0$$

Решением этого ур-е явл. Гауссова функ-я

Если на входе пакет имеет опти-ку:

$$a(0, \eta) = a_0 e^{-\eta^2 / 2 \tau_0^2}$$

$$a(x', \eta) = a_0 \frac{\tau_0}{L_g} e^{-\eta^2 / 2 \tau^2} \cdot e^{-i \text{sign} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{x'}{L_g} \frac{\eta^2}{2}}$$

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{L_g}\right)^2} \quad L_g = \frac{\tau_0^2}{\left|\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|} - \text{дисперс-е длины}$$

расплывание Гауссова импульса (ув-е со временем)

$$n(\omega) = n'(\omega) - i n''(\omega)$$

без приближений

Расчет импульса на выходе из среды:

$$E(t, z=0) \xrightarrow{\hat{F} \leftarrow \text{пре-е Фурье}} S(\omega) \rightarrow \tilde{S}(\omega) \xrightarrow{\hat{F}^{-1} \leftarrow \text{обратное Фурье}} E(t, z)$$

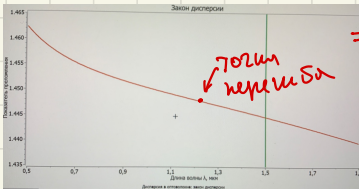
$$\tilde{S}(\omega) = S(\omega) \cdot \exp\left(\frac{-i n'(\omega) z}{c}\right) \cdot \exp\left(\frac{-n''(\omega) z}{c}\right)$$

Фазовые пакеты

затухание в обеих ат-й ди-т

Короткие импульсы дифф-е сильнее !!!

Менее длинны волны мы двигаем пакет $\leftrightarrow$ по кас-й имеем из:



$\Rightarrow$ нужно искать $\min \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Rightarrow$ мы добьемся мин рас-е пакетов

Спект уже $\rightarrow$ меньше рас-е

43) Влияние дисперсии на скорость передачи информации в волоконно-оптических линиях связи.

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{v_{gr}} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \leftarrow \text{Второй порядок теории дисперсии}$$

$x, t \Rightarrow x', \eta \leftarrow \text{делуемое время}$

$$\frac{\partial a}{\partial x'} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0$$

решение Паусси

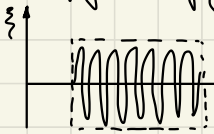
$$a(0, \eta) = a_0 e^{-\eta^2 / 2 \tau_0^2}$$

$$a(x', \eta) = a_0 \frac{\tau_0}{\tau} e^{-\eta^2 / 2 \tau^2} \cdot e^{-i \operatorname{sign} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{x'}{v_{gr}} \frac{\eta^2}{\tau^2}}$$

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{L_g} \right)^2} \quad L_g = \left| \frac{\tau_0^2}{\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}} \right| - \text{дисперсионная длина}$$

расплыв импульса

Мы передаем информацию в виде синусоидальной волны



Импульс конечной длительности — "1"

Короткий импульс — Частота спектра

Импульс конечной длительности имеет конечную ширину спектральной линии

Скорость передачи информации $B [\text{бит/с}]$.

$$B \approx \frac{1}{\tau} \leftarrow \text{длительность импульса}$$

B тем выше, чем меньше τ

Если предположить, что $\tau \geq T$

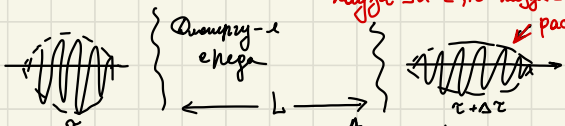
$$\lambda = cT \quad T = \frac{1}{f} \quad ; \quad \lambda = 600 \text{ нм} \Rightarrow T = \frac{6 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ с}$$

красно-оранжевый свет

$$\tau \geq 2 \text{ фс}$$

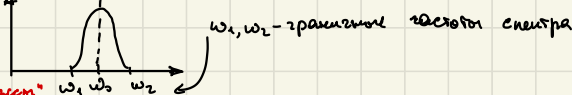
$$B \leq \frac{1}{\tau} = \left\{ \tau = 10 \text{ фс} \right\} = 10^{14} \frac{\text{бит}}{\text{с}} = 100 \frac{\text{Тбит}}{\text{с}} \quad \leftarrow \text{что мешает?}$$

Правильней $B = \frac{1}{\alpha \tau}$, $\alpha > 1$. Нужно это для того, чтобы детектор не "слипывал" пришедшие сигналы. Нужда $\alpha = 2$, то $\alpha \tau$ — временная ширина.



(Он и формулы поминет, но на это влияет детектор формулы не знает)

$$\Delta \tau = \left| \frac{L}{v_{gr}(\omega_1)} - \frac{L}{v_{gr}(\omega_2)} \right|$$



разность времени прохождения "трассы" для сигналов на частотах ω_1 и ω_2

(для дисперсии в том, что сигнал имеет разную скорость)

$$\Delta \tau \approx L \Delta \left(\frac{1}{v_{gr}} \right) = L \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_{gr}} \right) \Delta \omega = \left\{ v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \right\} = L \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \Delta \omega = \left\{ \Delta \omega = \text{const} \right\} = L \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\text{const}}{\tau}$$

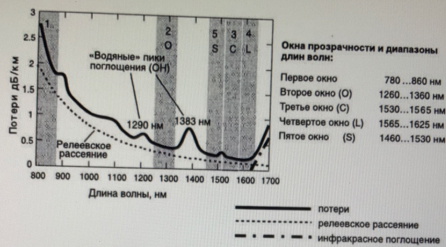
Почему в Т.О. и З.П. $\Delta \omega \tau \geq \text{const}$? Вдоль пути распространения сигнала с разницей скоростей

Когда мы имеем $\Delta \omega \tau = \text{const}$, или иначе говоря это все эти и ВП связаны с одной скоростью

$$I \rightarrow I + L \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\text{const}}{\tau}$$

$$B = \frac{1}{\alpha \tau} = \frac{1}{\alpha (\tau + L \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\text{const}}{\tau})}$$

$\rightarrow$ Нужно изменить числ-ой 2-й др-ой
 $\rightarrow$ Интенсивность нужно либо сменить
 $\rightarrow$ τ нужно уменьшить
 $\rightarrow$ τ нужно увеличить



$$\beta = \frac{1}{L} 10 \lg \frac{P_{\text{вх}}}{P_{\text{вых}}} \quad [\beta] = \text{дБ/км}$$

$$\beta \approx 0,1 \text{ дБ/км}$$

$$L = 1 \text{ км}$$

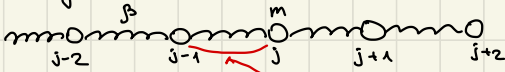
$$\frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}} \approx 0,98$$

45) Кинематическая схема волнового упр-я. Упругий, или физ-й аналог физ-ой схемы. Застота известна и вернее прикинуть частоту изогнута упругий

$$\omega \approx \Omega - \text{врем-я} - \text{гущ-я}$$

$$\lambda \approx L - \text{прот-я}$$

Пространств-время:



β -изогнута жесткости

Упр-е Лагранжа: $u_{j+1} - u_j = \text{расстояние}$

$$\Pi = \frac{\beta}{2} \sum_j (z_{j+1} - z_j)^2 - \text{Пот-я эл-ры} \quad k = \frac{m}{2} \sum_j \dot{z}_j^2 - \text{кин-я эн-я}$$

$$L = K - \Pi \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial L}{\partial z_j} = 0$$

Лагранжиан $\dot{z}_j$ скорость z_j координата

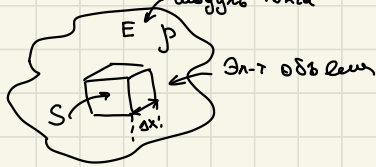
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{z}_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial z_j} = 0$$

$$\Pi = \dots + \frac{\beta}{2} (z_{j-1} - z_j)^2 + \frac{\beta}{2} (z_j - z_{j+1})^2 + \dots$$

$$\text{Получим: } m \ddot{z}_j + \beta (-z_{j-1} + 2z_j - z_{j+1}) = 0 \quad | : m$$

$$\ddot{z}_j - \frac{\beta}{m} \Delta^2 z_j = 0$$

У нас есть не прямая связь между E и β



$$\beta = \frac{ES}{\Delta x} \quad m = \rho \cdot S \Delta x$$

$$\frac{\beta}{m} = \frac{ES}{\rho S (\Delta x)^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$\left[\frac{E}{\rho} \right] = \frac{H/M^2}{K^2/M^3} = \frac{H \cdot M}{K^2} = \frac{K^2 \cdot M \cdot M}{C^2 \cdot K^2} = \frac{M^2}{C^2}$$

$$\frac{\beta}{m} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2} = C^2 \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

Итого:

$$\ddot{z}_j - C^2 \frac{\Delta^2 z_j}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \{ \Delta x \rightarrow 0 \} \Rightarrow \frac{\partial^2 z_j}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 z_j}{\partial x^2} = 0$$

$$z_j = A e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{канна} \quad x = k \cdot h$$

$$m \ddot{z}_j + \beta (-z_{j-1} + 2z_j - z_{j+1}) = 0$$

$$\ddot{z}_j = (i\omega) \cdot (i\omega) A e^{i(\omega t - kx)} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - kx)}$$

$$-z_{j-1} = -A e^{i(\omega t - kx(j-1))} = -A e^{i(\omega t - kx)} e^{ikx}$$

$$-z_{j+1} = -A e^{i(\omega t - kx(j+1))} = -A e^{i(\omega t - kx)} e^{-ikx}$$

Пограничные условия:

$$-m\omega^2 + \beta(2 - e^{ix} - e^{-ix}) = 0$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

$$-m\omega^2 + 2\beta(1 - \cos x) = 0 \quad 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$-m\omega^2 + 4\beta\sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\omega^2 = 4\frac{\beta}{m}\sin^2 \frac{x}{2} = 4\frac{\beta}{m}\sin^2 \frac{kh}{2}$$

Дискретное соотношение между частотой и волновым вектором $\omega(k)$

Аппроксимация:

$$x \ll 1 \quad kh \ll 1 \quad \frac{2\pi}{\lambda}h \ll 1 \quad h \ll \lambda$$

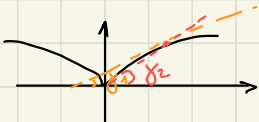
$$\omega^2 \approx \frac{4\beta}{m}\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{\beta}{m}k^2 \quad \frac{\beta}{m}h^2 = c^2$$

$$\omega^2 \approx \frac{c^2}{h^2}(kh)^2 = c^2k^2$$

$$\omega \approx \pm ck$$

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = c \quad v_{\text{г}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c$$

$$2: x \leq 1 \Rightarrow \omega = \pm 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}\sin \frac{x}{2}$$



$\text{tg } \theta_1 = v_{\text{г}}$ $v_{\text{г}} > v_{\text{ф}}$ $v_{\text{ф}} > v_{\text{г}}$ $v_{\text{ф}} = v_{\text{г}}$ $v_{\text{ф}} < v_{\text{г}}$

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \quad v_{\text{г}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{\frac{\beta}{m}} \cos \frac{x}{2}$$

$$\frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{г}}} = \frac{\text{tg } \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} > 1$$

$$\omega^2 = 4\frac{\beta}{m}\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\omega_{\text{max}} = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad x = \pi$$

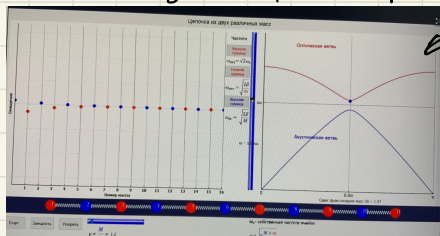
$$kh = \pi \quad \frac{2\pi h}{\lambda} = \pi \quad \lambda_{\text{min}} = 2h$$

$$v_{\text{г}}(x = \pi) = 0 \quad \text{— стоячие волны}$$

$$\omega > \omega_{\text{max}} \quad x \rightarrow i\pi + x_0 \quad x_0 = \pi$$

$$z_j = A e^{i(\omega t - x_j)} = A e^{-\alpha_j} e^{i(\omega t - \pi j)} \quad \text{— Затухает}$$

Полоса прозрачности — диапазон частот $(0; \omega_0]$ — если мы возьмем на частоте ω_0 и выше, то волны не пройдут по цепочке и границе волны $\omega = \omega_0$ волны есть, но энергия не передается — стоячие волны



если массы разные

ЧАСТОТА НАЙКВЕСТА

где закон-и цепи h и min граница волны распространяется или нет

6) Электронная теория дисперсии. Норм / это - дис-е эл-х волн. Линия пом-е

$m \ddot{\vec{r}} = -g \vec{r} - k \vec{r} + q \vec{E}$

усп-е энергич-е част-ти *силы эл-е поле эл-й волна* *Возр-е сила в пол. р-е*

$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = q \vec{E}$ $\gamma = \frac{q}{m}$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$

$\vec{r}_0 (-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{q E_0}{m}$

$\vec{r}_0 = \frac{q E_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

$\vec{P} = q \vec{r}$ - индукц-й диполь-ый момент

$\vec{P} = N q \vec{r}$ - поляризация среды

$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = N q \vec{r}$

$\epsilon_0 (\epsilon - 1) E_0 e^{i\omega t} = N q r_0 e^{i\omega t}$

$r_0 = \frac{q E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

$\epsilon_0 (\epsilon - 1) = \frac{N q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

$\epsilon = 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon} \mu \approx \sqrt{\epsilon}$

$n^2 \approx 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

Закон дисперсии

$n^2 = 1 + \frac{N q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$

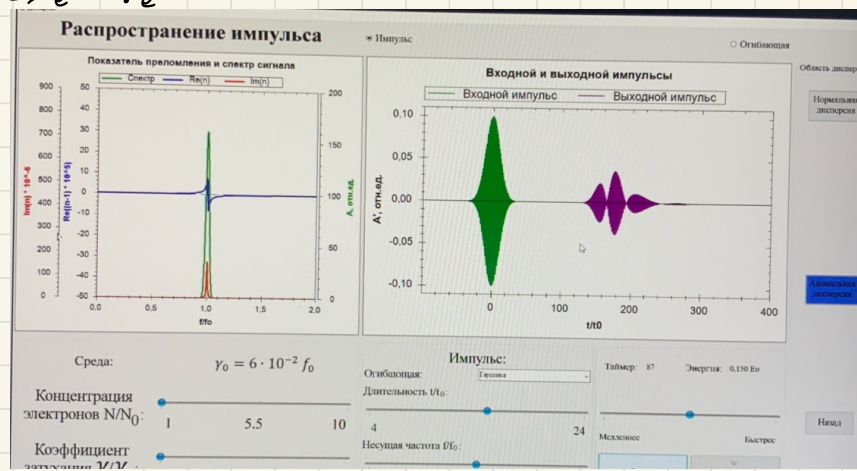
$n^2 = (n' - i n'')^2 = (n'^2 - n''^2) - i (2 n' n'')$

$e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow e^{-ikx} \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega n}{c_0} = \frac{\omega}{c_0} (n' - i n'')$

$\Rightarrow e^{-i \frac{\omega}{c_0} (n' - i n'') x} \Rightarrow e^{-i \frac{\omega n'}{c_0} x} \cdot e^{-\frac{\omega n''}{c_0} x}$

47

тут все + демон-я



В плазме (ионизиро-е среда) ^{находятся} ионы и электроны

$$n^2 = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

$$\omega_0 = 0 \quad \gamma = 0$$

$$n^2 = 1 - \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

$$n = \frac{c}{v_\phi} \Rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{\omega}{k}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad 2k dk = 2\omega d\omega$$

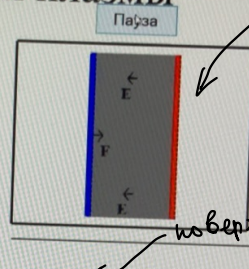
$$\frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c^2 \quad v_\phi \cdot v_{\phi p} = c^2 \quad v_{\phi p} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Imag-л частота

Колебания плазмы

Величина $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m\epsilon_0}}$ [рад/с] называется **плазменной частотой**. Частота ω_p играет для плазмы роль собственной частоты. Однако она характеризует не отдельные частицы, а весь коллектив заряженных частиц, из которых состоит плазма.

Допустим, что нейтральная плазма занимает расстояние между бесконечными пластинами, перпендикулярными к оси X. Среднее электрическое поле в такой плазме равно нулю. Сместим все электроны вдоль оси X на малое расстояние x , а ионы (тяжелые) оставим несмещенными. Тогда в плазме возникнет электрическое поле E , а на каждый электрон будет действовать квазипрутая сила $F = -eE$. Если плазму предоставить самой себе, то возникнет свободное гармоническое колебание электронов с собственной частотой ω_p .



Он находится на конденсаторе

верх-е н-то заряда

$$E = \frac{eN}{\epsilon_0} x$$

$$m\ddot{x} = -eE$$

$$\ddot{x} + \frac{e^2 N}{m\epsilon_0} x = 0$$

- ионы

- электроны

Сивухин Д.В.

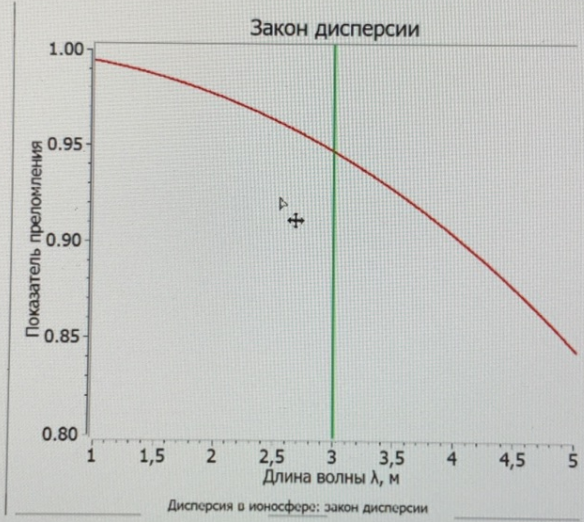
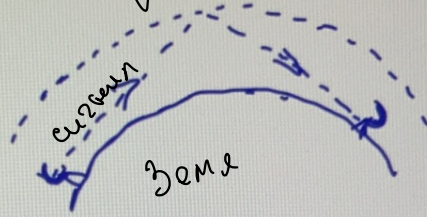
"Оптика"

плазма

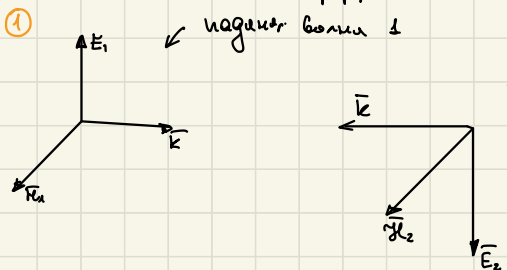
$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$n < 1$$

на коротких волнах НВЧ



48) Двухлучевая интерференция. Суперпозиция плоских волн сферич. интерфер-и
 волн. Условие интерфер-о максимум и минимум



$$R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (n_1 < n_2 \text{ если } R < 0, \text{ то либо сдвиг фазы на } \pi \text{ либо смена знака поля})$$

Тогда в среде ①

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$E_2 = -E_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

$$E_2 = E_0 e^{i(\omega t + kx + \pi)} = \left\{ k = \frac{2\pi}{\lambda}; \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi \right\} = E_0 e^{i(\omega t + k(x + \frac{\lambda}{2}))}$$

По принципу суперп-ии:

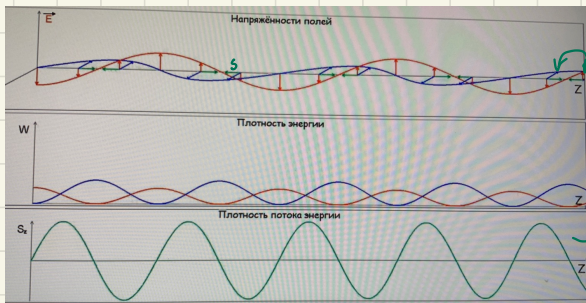
$$E_1 + E_2 = E_0 e^{i\omega t} (e^{ikx} - e^{ikx}) = (-2i) E_0 e^{i\omega t} \sin kx = 2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \sin kx;$$

$$\operatorname{Re} E = 2 E_0 \sin \omega t \cdot \sin kx$$

$$\text{аналогично: } \overline{H}_1 + \overline{H}_2 = 2 H_0 \cos kx e^{i\omega t}$$

$$\operatorname{Re} H = 2 H_0 \cos \omega t \cos kx$$

↑ стоячая волна. В стоячей волне E и H сдвигаются между собой по фазе (когда H макс E мин и наоборот)



более сложный случай

лучи сферич. волн

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &\sim \vec{E}_0 e^{ikr_1} \\ \vec{E}_2 &\sim \vec{E}_0 e^{ikr_2} \end{aligned}$$

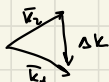
(Время не учитываем считаем все слож-о т.е. это есть у ① и ② сфер-е)

↑ комплексно сопр-е велич-х

$$\begin{aligned} I(\omega) &\sim |\vec{E}|^2 \Rightarrow \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle \Rightarrow (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) = E_1^* E_1 + E_2^* E_2 + E_1^* E_2 + E_2^* E_1 \\ \vec{E}_0 \vec{E}_0^* &= [e^{i(k_1 - k_2)r} e^{i(k_2 - k_1)r}] \Rightarrow \{E_1 \| E_2\} \Rightarrow I_1 + I_2 + 2 \cos \Delta \varphi \end{aligned}$$

Если поле ортаг-о поляризов-и, то интерфер-о злик не будет вовсе

$$\Delta \varphi = \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}$$



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$$

$$I \cos \Delta \varphi = I \quad \Delta \varphi = 2\pi n \quad \Delta ky = 2\pi n$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > I_1 + I_2 \quad \leftarrow \text{MAX интенсив-и}$$

$$\cos \Delta \varphi = -1 \quad \Delta \varphi = (2n+1)\pi \quad \Delta ky = (2n+1)\pi$$

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I_1 + I_2 \quad \leftarrow \text{Min интенсив-и}$$

$$I k_1 = k_2 \quad \Delta k = 2k \sin \frac{\alpha}{2} \quad \frac{\Delta k / 2}{k} = \sin \frac{\alpha}{2}$$


$$\Delta k = 2k \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Delta \varphi_{\text{MAX}}^{(1)} = 2\pi n$$

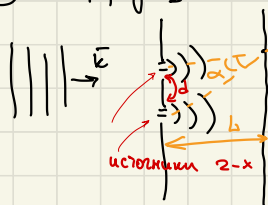
$$\Delta \varphi_{\text{MAX}}^{(2)} = 2\pi(n+1)$$

$$2k \sin \frac{\alpha}{2} y = 2\pi n \quad 2k \sin \frac{\alpha}{2} y' = 2\pi(n+1)$$

$$2k \sin \frac{\alpha}{2} \Delta y = 2\pi \quad 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Delta y = 2\pi$$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \left\{ \alpha < \Delta \right\} \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda}{\alpha} \leftarrow \text{расстояние между соседними макс'и интерф-и} \quad \text{мин'и}$$

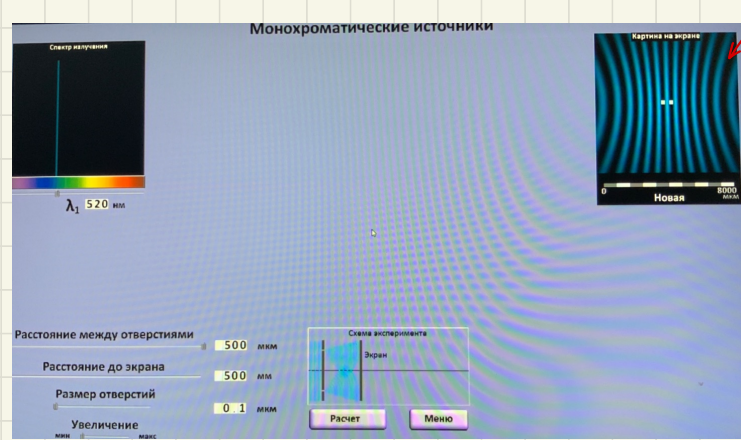
49) Интерференция волн от 2-х точечных источников



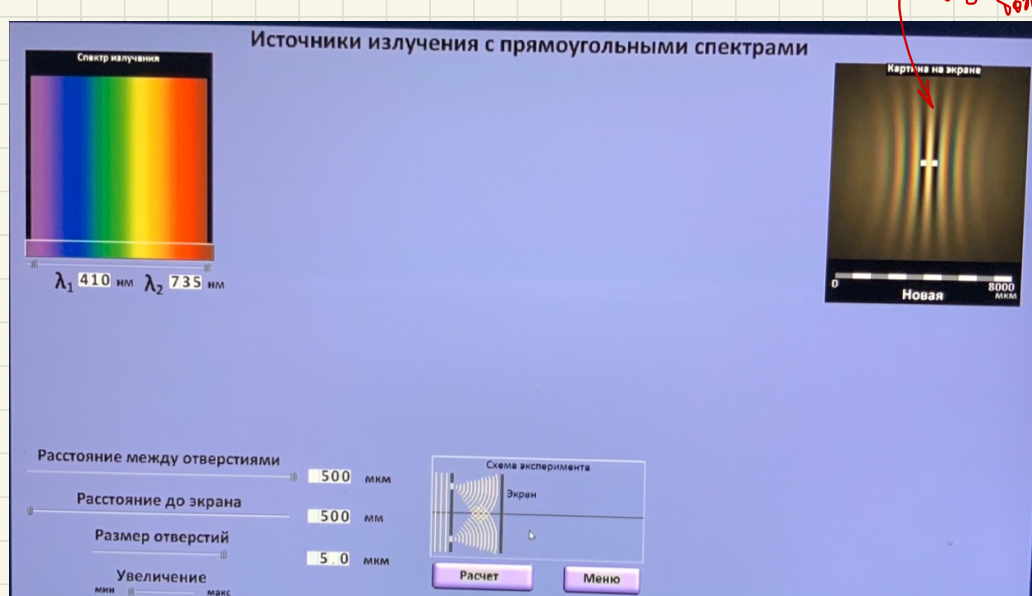
$$\alpha \approx \frac{d}{L}$$

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}$$

источники 2-х сф-х волн, если экран далеко аналогично ч8 (конеч)

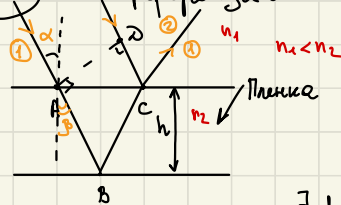


исх-е из-за сферич-х волн



различия из-за большой разности длин волн > λ

50. Интерференция в тонких пленках. Цвета тонких пленок.



Луч ① падает на верхнюю поверхность пленки, преломляется, падает на нижнюю поверхность пленки, отражается, снова попадает на верхнюю поверхность пленки, преломляется и выходит наружу.
 Луч ②, который падает в точку выхода луча ① (на расщепление) (на расщепление) (на расщепление)

В точке C происходит интерференция:

Интерференция возникает из-за разности хода $\Delta \varphi = k_2 (AB + BC) - k_1 AC + \pi$ (В точку A луч ① приходит одновременно с лучом ② в точку C)

Далее луч ② пройдет всего AC , а луч ① $AB + BC$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{\frac{c}{n_2 T}} = \frac{2\pi n_2}{c T} = k_1 n_2$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \pi = \frac{k_1 \lambda}{2}$$

$$\Delta \varphi = k_1 (n_2 (AB + BC) - AC + \frac{\lambda}{2})$$

$$AB = BC = \frac{h}{\cos \beta} \quad AC = AC \sin \alpha = 2h \tan \beta \sin \alpha$$

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \Rightarrow$$

$$\Delta \varphi = k \left(n_2 \frac{2h}{\cos \beta} - \frac{2h n_2 \sin^2 \beta}{\cos \beta} - \frac{\lambda}{2} \right) = \left(2h \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \cos \beta - \frac{\lambda}{2} \right) \cdot k$$

$$\varphi = \varphi(h, n_2, \lambda)$$

Интерференция двух волн в точке C будет чистой (если падает белый свет) (коэффициент преломления для разных длин волн разный - дисперсия) $\Rightarrow$

Для разных длин волн в точке C интерференция будет иметь разный характер

Может сложиться, что, зная интерференцию, будет можно для красного света $\Rightarrow$

в точке C будет усиление красного света (ну там полный износ и т.д.)

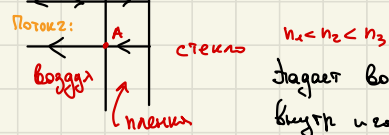
т.к. толщина пленки $h \neq \text{const}$, то в разных частях пленки будут разные цвета (или в бензиновой луже на воде)

51) Просветляющее покрытие

Просв-е покрытие - это очень тонкая пленка из диэлектрического материала, который наносят на поверхность оптических приборов (очки/телескоп и т.д.)

Смысл - это покрытие минимизирует кол-во отраженного света

Поток 1: $n_1=1$ n_2 n_3 ← Принцип работы



Задаёт волна, она частично отражается от 1-й границы и проходит дальше, частично отражается от второй границы

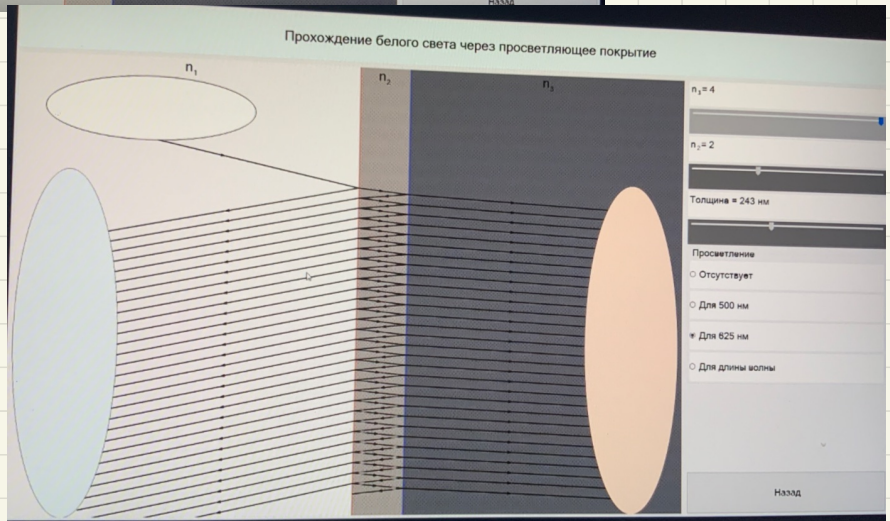
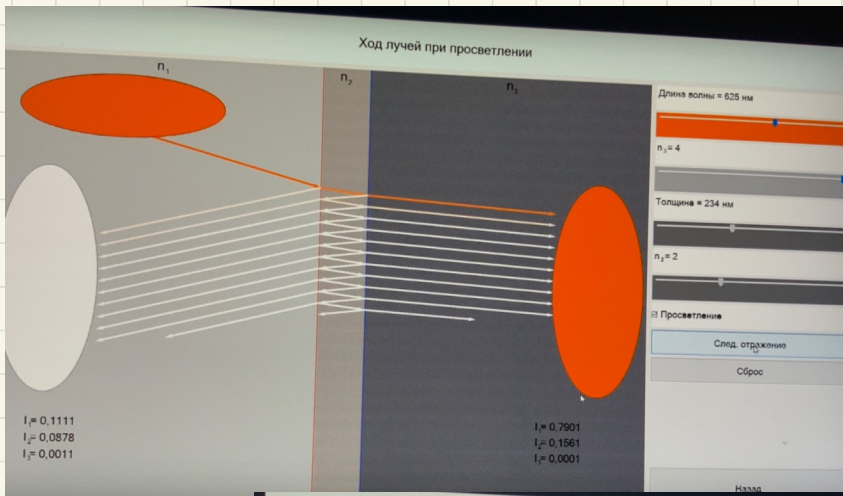
Между потоками $2n \frac{\pi}{\lambda} n_2 = (2m+1)\pi$ ← Множители чтобы в точке А волны были деструктивны.

и-е, т.е. на выходе из А не будет света вообще, т.е. он полностью пошёл в среду 3

$$h = (2m+1) \frac{\lambda}{4n_2} = m \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Целое число пополам + $\frac{1}{4}$ длинны волны.

$$d_2 = \frac{\lambda}{n_2}$$



52) Интерференция излучения монохроматических волн. Условия возникновения интерференционной картины. Закон Косинусов

Рассм. интерференцию 2-х волн:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_1)} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_2)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} \rightarrow kr = \frac{\omega}{v} r = \omega \Delta t \quad \text{задержка по времени}$$

$$E = E_0 e^{i\omega(t + \Delta t)} \Rightarrow \begin{aligned} E_1 &= E_{10} e^{i\omega t} \\ E_2 &= E_{20} e^{i\omega(t + \tau)} \end{aligned} \quad \text{задержка}$$

$$E_1 = a + ib \quad E_2 = c + id$$

$$E_1 E_2^* = ac + bd + ibc - iad$$

$$E_1^* E_2 = ac + bd - ibc + iad$$

$$E_1 E_2^* + E_1^* E_2 = 2(ac + bd) = 2 \operatorname{Re}(E_1 E_2^*)$$

$$\langle E_1 E_2^* \rangle_t = \Gamma_{12}(\tau)$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2^*(t + \tau) dt$$

Фун-ия взаимной корреляции 2-х волн 1 и 2

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad \leftarrow \text{Степень когерентности}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma(\tau)$$

Раньше мы не учитывали разности фаз 2-х волн

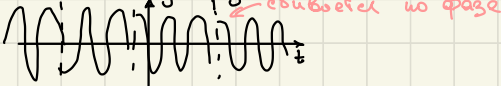
$$E_1 = A_1 e^{i(\omega t - \varphi_1(t))} \quad E_2 = A_2 e^{i(\omega t - \varphi_2(t))}$$

$$2 \langle \operatorname{Re}(E_1 E_2^*) \rangle_t = 2 A_1 A_2 \langle \operatorname{Re} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \rangle_t = 2 A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle_t$$

$$\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle_t = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2 \quad (\text{нет интерференционной картины})$$

$$\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle_t \neq 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta \varphi \rangle_t$$

Волны со сдвиг фазы:



Рассм. и сигнал постоянной частоты

$$E_1 = A_1(t) e^{i\omega t} \quad E_2 = A_2(t) e^{i\omega t}$$

Не просто амплитуды, а огибающие, описывающие импульсный характер источников

$$\gamma = \frac{\langle A_1(t) \cdot A_2(t + \tau) \rangle_t}{\sqrt{I_1 I_2}} \cdot e^{i\omega \tau} = |\gamma(\tau)| \cdot e^{i\omega \tau}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)| e^{i\omega \tau} (\operatorname{Re} e^{i\omega \tau})$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma(\tau)|$$

$$\text{Функция видности: } V(\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma(\tau)|$$

на сколько хорошо видна интерференционная картина

Возм.-е Вар-т

$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$|\gamma(\tau)| = 1$$

$$V = 1$$

$$I_{\max} = 4 I_0$$

$$I_{\min} = 0$$

- Устойчивый Абсолютно когерентный

$$|\gamma(\tau)| = 0$$

$$V = 0$$

$$I_{\max} = I_{\min} = 2 I_0$$

- Устойчивый Абсолютно не когерентный

$$0 < |\gamma(\tau)| < 1$$

$$0 < V < 1$$

$$I_{\min} > 0$$

- Частично когерентный

$$2 I_0 < I_{\max} < 4 I_0$$

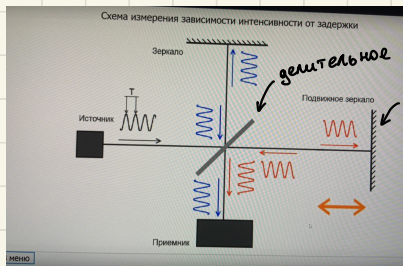
Когерентность излучения

$$I = 2 I_0 (1 + |\gamma(\tau)| \operatorname{Re} e^{i \omega \tau})$$

$$\gamma(\tau) = \frac{P_{11}(\tau)}{I_0} = \frac{\langle E_1(t) E_1^*(t+\tau) \rangle_t}{I_0}$$

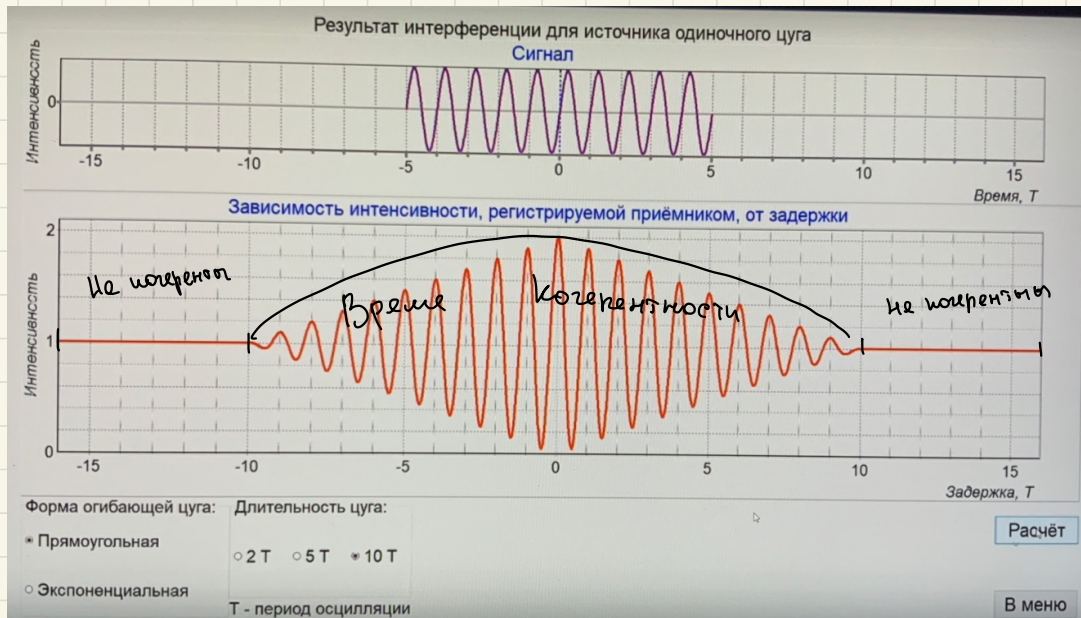
автокорреляц. функ-я

54 Экспериментальное определение когерентности. Времене когер-и для светов пучков и импульсов

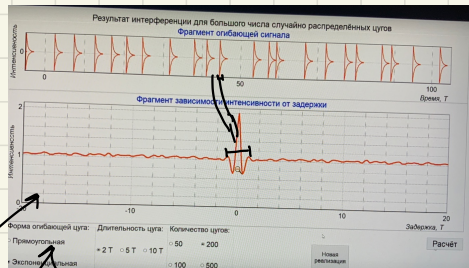
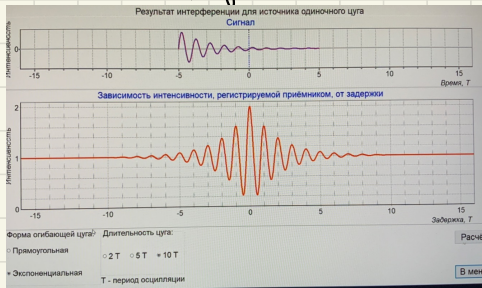


делительное зеркало
меняет задержку
между 2-я пучками
по сути меняет τ (см билет 52/б?)

Интерферометр Майкельсона



Интервал, где пучки когерентны называют временем когерентности



разный
источник
св.е сигнала

55) Теорема Винера-Хинчина. Понятие о Фурье-спектральной

Время когерентности - время существования интерференционного сигнала
 Длина когерентности - время когерентности $\times$ скорость света в вакууме

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi^*(t) \xi(t+\tau) dt \leftarrow \text{Автокорреляционная функция}$$

Посмотрим на неё со стороны спектрального анализа

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \Rightarrow \{ |S(\omega)|^2 \sim T \} \Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$S(\omega) \cdot S^*(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} \xi^*(t) e^{i\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} & \text{Пусть: } t' = t + \tau; dt' = d\tau \\ & S(\omega) \cdot S^*(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} d\tau \int_{-T/2}^{T/2} \xi^*(t) e^{i\omega t} dt = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \iint_{-T/2}^{T/2} \xi^*(t) \xi(t+\tau) dt e^{-i\omega \tau} d\tau \quad | \cdot 2\pi$$

$$2\pi |S(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

$$\int 2\pi |S(\omega)|^2 = G(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega$$

Получается, или по спектру находят энергию сигнала

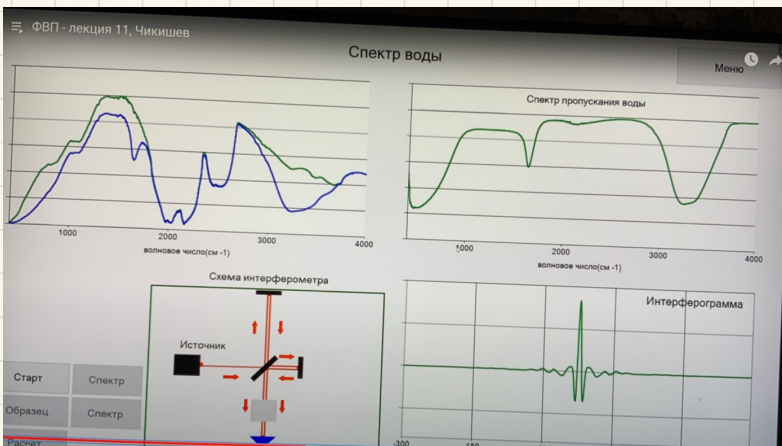
- это преобразование Фурье

Теорема Винера-Хинчина

Эта теорема с помощью преобр-я Фурье связывает автокорр-ю функ-ю и $G(\omega)$ - спектральную плотность мощности

↑ теорема

Принцип работы Фурье-спектральной с помощью теоремы



56) Многоточковая интерференция волн от источников одинаковых источников. Положение и ширина главных максимумов

N-точечных излучателей

Рассм. излучение, которое фронт-е под некоторым углом θ
] точка в которой мы наблюдаем излучение находится на достаточно большом расстоянии
 $\Rightarrow$ можем считать фронты волн не сферич., а плоскими
 $\Rightarrow$ можем считать излучение только под одним углом θ
 Имеем: $\vec{E}_1 = E_{10} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$
 $\vec{E}_2 = E_{20} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi)}$
 $\vdots$
 $\vec{E}_n = E_{n0} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - (n-1)\varphi)}$
 $\Delta = d \sin \theta$

$$\varphi = k\Delta = kd \sin \theta$$

$$\Rightarrow E_{10} = E_{20} = \dots = E_{n0} = E_0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi} = \frac{1 + e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

$$\frac{1 - e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi N/2}}{e^{-i\varphi/2}} \left(\frac{e^{i\varphi N/2} - e^{-i\varphi N/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \right) = \left\{ I \sim |E|^2 \right\} \Rightarrow$$

$$I \sim \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd \sin \theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)}$$

$$\max: \frac{kd \sin \theta}{2} = m\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\pi m$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$$

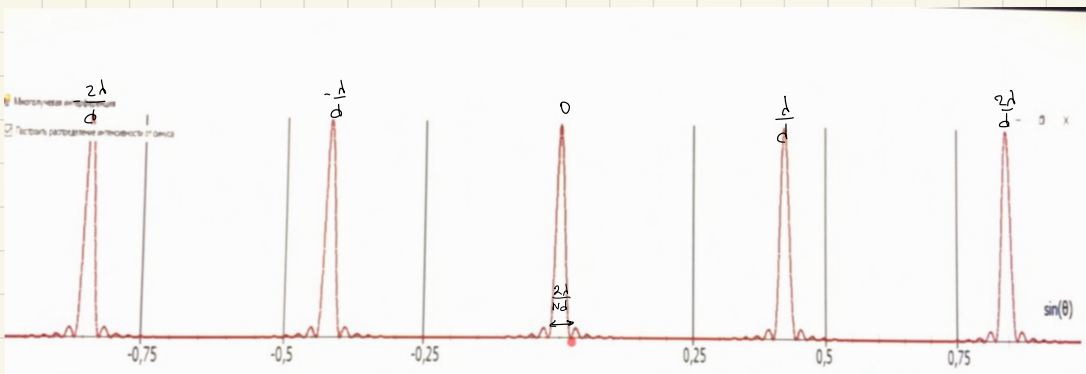
$$I_{\max} \sim I_0 \cdot N^2$$

$$\min (\pm 1) \quad \frac{KNd \sin \theta}{2} = \pm \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} Nd \sin \theta = \pm 2\pi$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\Delta(\sin \theta) \approx \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd} \sim \frac{1}{N} - \text{формат главного максимума}$$



57) Антенные решетки. Узловое излучение. Диаграмма направленности и ее сканирование

N-точечных излучателей

Рассм. излучение, которое фронт-е под некоторым углом θ

] тогда в которой мы наблюдаем излучение находится на достаточно большом расстоянии

$\Rightarrow$ можем считать фронт изл. не сферич., а плоским

$\Rightarrow$ можем считать излучение только под одним углом θ

$$\text{Имеем: } \vec{E}_1 = E_{10} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Delta = d \sin \theta$$

$$\vec{E}_2 = E_{20} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)}$$

$\vdots$

$$\vec{E}_n = E_{n0} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - (n-1)\varphi)}$$

$$\varphi = k\Delta = kd \sin \theta$$

$$\text{] } E_{10} = E_{20} = \dots = E_{n0} = E_0 \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi} = \frac{1 - e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

Этим
приним.

ЭОМ - нр.д

$$\frac{1 - e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi N/2}}{e^{-i\varphi/2}} \left(\frac{e^{i\varphi N/2} - e^{-i\varphi N/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \right) = \left\{ I \sim |E|^2 \right\} \Rightarrow$$

$$I \sim \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd \sin \theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)}$$

$$\max: \frac{kd \sin \theta}{2} = m\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2\pi m$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$$

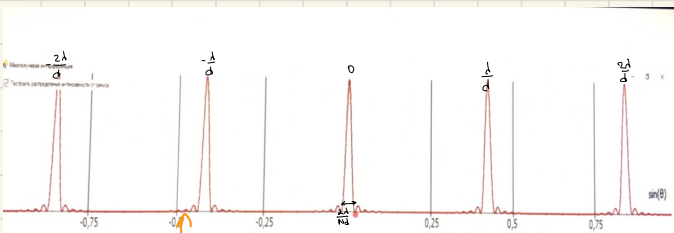
$$I_{\max} \sim I_0 \cdot N^2$$

$$\min(\pm 1) \frac{kd \sin \theta}{2} = \pm \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} Nd \sin \theta = \pm 2\pi$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{Nd}$$

$$\Delta(\sin \theta) \approx \Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd} \sim \frac{1}{N} \text{ - зональная глубина антенны}$$



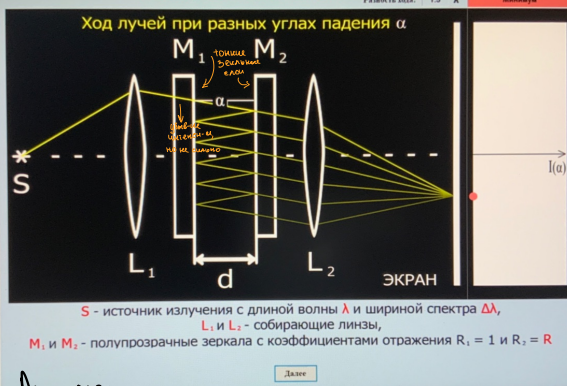
Диаг-а направл-и - распределение интенсивности по углу или перенос в координаты



Сибирский солнечный радиотелескоп (ССРТ) — один из крупнейших астрономических инструментов, входящий в перечень уникальных установок России, нацеленный на перспективу радиотелескопической обсерватории «Большая телескопическая решетка» (БТР). ССРТ расположен в долине между хребтами Восточный Саян и Западный Саян в 200 км от Иркутска. Радиотелескоп представляет собой массивный радиотелескоп, состоящий из двух линий радиотелескопов длиной по 128 м каждая. Антенны имеют диаметр 2,5 м и установлены на равном расстоянии в 4,9 м друг от друга. На момент создания ССРТ (1988) он не имел мировых аналогов. Радиотелескоп предназначен для изучения солнечной атмосферы в радиодиапазоне длин волн 0,7 (ГГц). Наблюдения дают важную информацию как о солнечных активных областях, происходящих в них вспышках, выбросах корональной массы, так и сведения о ионосферных областях на Солнце, тропе или коронарных дырах, ярком корональном тоне, коронах.

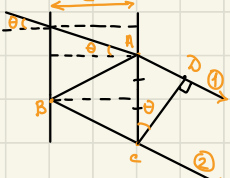
58) Многочисл. и-е . Интерферометр Дабри-Тиро

ПРИНЦИП РАБОТЫ ИНТЕРФЕРОМЕТРА



Принцип работы: в интерферометр попадает луч (с малой частью попо-т вышнф) наблюдается многоразное отражение с опр-м пропуск-ем лучей дальше линза L1 - нужна, чтобы вводящий лучи пот-н в интерферометр под разными углами линза L2 - нужна, чтобы обеспечить наблюдение интерфр-ии на не сверх больших расстояниях

Анализ:



$$\Delta = AB + BC - AD$$

$$AB = BC = \frac{d}{\cos \theta}$$

$$AD = AC \sin \theta$$

$$AC = 2d \tan \theta$$

$$\Delta = \frac{2d}{\cos \theta} - 2d \tan \theta \sin \theta$$

$$\Delta = 2d \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) = \frac{2d}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta) = 2d \cos \theta$$

$$\varphi = k \Delta = 2k d \cos \theta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta$$

γ - коэф. прохождения по интенсивности

β - коэф. отражения по интенсивности

т.к $I \sim |E|^2$, то умн. ем на $\sqrt{\gamma}$

$$E_{10} \sim E_0 \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\gamma} = \sigma E_0$$

$$E_{20} \sim E_0 \sqrt{\sigma} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\beta} \cdot E_0 = \sigma \beta E_0$$

$$E_n = \sigma \beta^{n-1} E_0 e^{i(n-1)\varphi}$$

$$E = E_0 \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} = \frac{E_0 \sigma}{1 - \beta e^{i\varphi}}$$

$$E = \frac{E_0 \sigma}{1 - \beta (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = E_0 \sigma \frac{(1 - \beta \cos \varphi) - i \beta \sin \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^2 + \beta^2 \sin^2 \varphi}$$

$$I \sim |E|^2 = \frac{I_0 \sigma^2}{(1 - \beta \cos \varphi)^2 + \beta^2 \sin^2 \varphi} = \frac{I_0 \sigma^2}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \varphi}$$

$$= \frac{I_0 \sigma^2}{1 + \beta^2 + 2\beta (2\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)} = \left\{ \frac{\beta + \sigma}{2\cos} = 1 \right\} = \frac{I_0 (1 - \beta)^2}{(1 - \beta)^2 + 4\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{I_0}{1 + \frac{4\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - \beta)^2}} \quad \varphi = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta$$

$$\int \theta = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{d} \quad \frac{\varphi}{2} = \pi m \quad \frac{2\pi d}{d} = m\pi \Rightarrow d = \frac{1}{2} m$$

$$I_{\max} \approx I_0$$

$$\min: \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$I = I_0 \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}$$

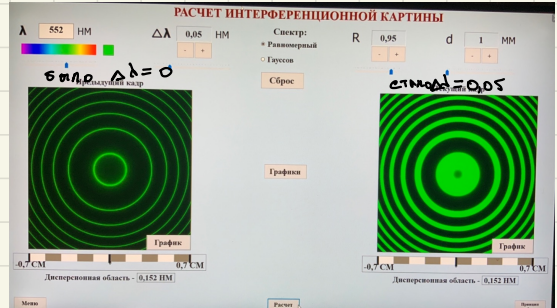
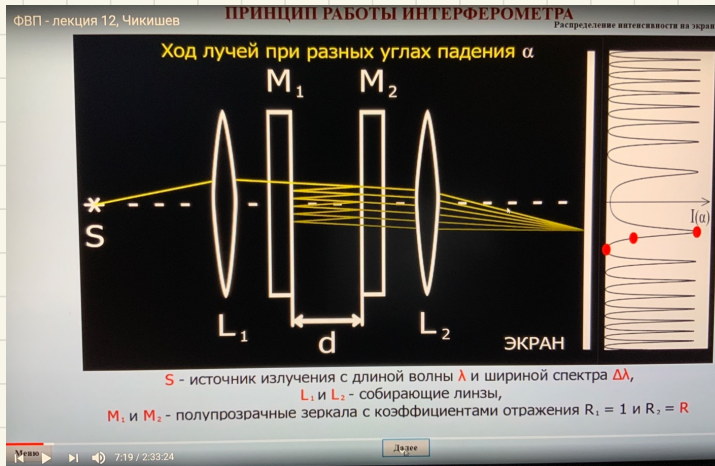
Про разрешающую способность (способность отличить волны с разными λ)

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{2d} \quad \text{— Область дисперсии интерф-а (та область где интер-1 картинка не сливается)}$$

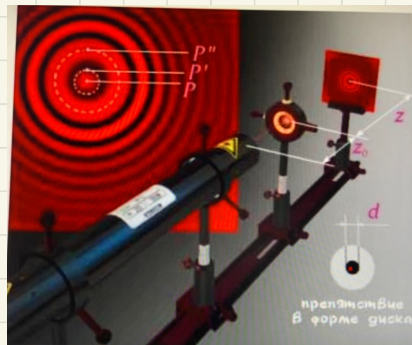
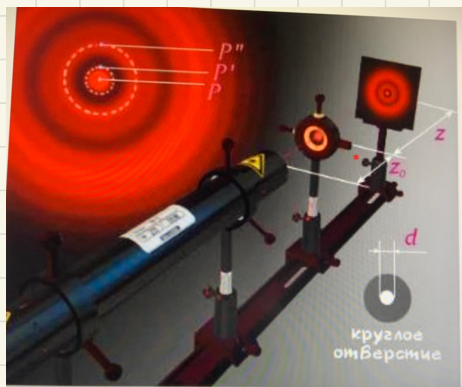
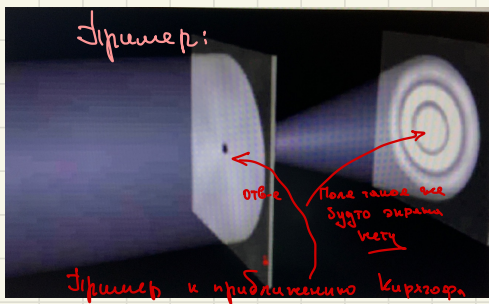
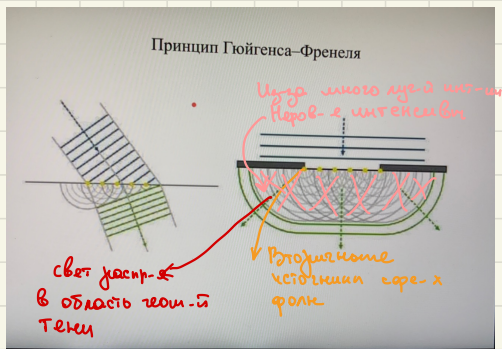
$$\frac{2\pi d}{\lambda} \approx \frac{2\pi \cdot 10^{-3} \text{ м}}{6 \cdot 10^{-7} \text{ м}} \approx 10^4$$

$$A = \frac{d}{\Delta \lambda} \approx \frac{2\pi d \sqrt{\beta}}{\lambda(1-\beta)} \leftarrow \text{Рез-ция-е сн-ть}$$

$$\frac{\sqrt{\beta}}{(1-\beta)} \approx \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{2})} \approx \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$$



(59) Гюйгенс задал вопрос дифракции. Принцип Гюйгенса - Френеля. Качественный вид диф-й картин.
Принцип Гюйгенса был про двукратно применен.



Моло тою, що створюється 2-а серія волни.
они все ч інтерпретують!

Явл-е дифракции - это такое явл-е при котором
распр-е света и при его взаимодей-ии с отверстиями
или препятствиями отличается от того распр-е, которое опис-ся
законами геом-ии оптики

Решим волновое ур-е:

$$\frac{\partial^2 z(r,t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta z(r,t) = 0$$

$$] z(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega}(r) e^{i\omega t} d\omega$$

(E_{ω} — амплитудное поле на частоте ω
убираем зависимость от времени)

в итоге получили ур-е Гельмгольца для амплитуды гармонической волны:

$$\Delta E_{\omega}(r) + k^2 E_{\omega}(r) = 0$$

Интегральная ^(формула) Пельтье-Кирхгофа для амплитуды поля в точке наблюдения P (интегральное уравнение)

$$E(p) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} (E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n}) d\Sigma$$

Это позволяет найти амплитуду электрического поля в нек-й
 точке пространства P , зная значения поле функ-ции Грина
 и производ-ую этого поля и функ-ции Грина на границе нек-й
 области, содержащей в себе точку P .

С учетом условия излучения (Зоммерфельда)

Оно состоит в том, что предыдущее ит-е управ-е сильно упр-е, если вын-ся:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial E}{\partial n} + \left(1 + \frac{1}{R} \right) E \right) = 0$$

Этот нулеи = 0, т.к. если мы рас-еи:

upon $R \rightarrow \infty$ $E \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$; $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$

При фиксированном λ поле в некоторой точке P , порождает-ся
за эллипсом с осями

⇒ Из всей этой замкнутой конвер-и вы-ти только за экраном наблюд-я мы оставляем только экран и отв-е т.е.

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_{\text{отб}} + \bar{\Sigma}_{\text{экп}}$$

Приближение Кирхгофа:

оно состоит в том, что поле на экране равно 0, а в противном, совпадаю с невозмущенным полем, которое было бы в отсутствие экрана

(Если просто: во всех точках, где экран не пропускает поле = 0, а в остальных отверстиях такое же, какое было в этой точке, если бы экрана не было)

(см фото 1)

Но суть в том, что это допущение и по-другому бывает: 3 крайние эффекты: эл-м-е волны взаимодействует с экраном (это материал-е объект) эл-м-е волны вызывает движение в этом мат-е движение зарядов-индуцирует токи-наводит динамиче моменты и т.д.; т.е. края экрана поле такого взаимодей-е издает некоторые возмущения, которые возмущают поле в пределах отверстия

Но мы на это забываем, спасибо Кирхгофу

$$E(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} \left(E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G(M) \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) d\Sigma_{\text{отв}} \quad (\text{Теперь мы можем считать } \int \text{только по отверстию})$$

$$G(M) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$E_s(M) = A \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \quad \leftarrow \text{сфер-е волна}$$

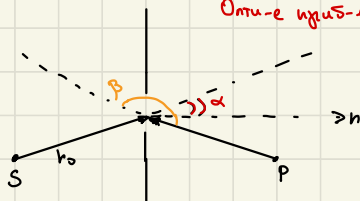
функция Грина

Оптическое приближение:

$$r_0, r \gg \lambda \Rightarrow \frac{1}{r_0}, \frac{1}{r} \ll ik$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \right) = \cos \alpha \left(-ik + \frac{1}{r_0} \right) \cdot \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \approx ik \cos \alpha \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$$

Опти-е приближ-е может нам пригодиться



В итоге после упр-й получим

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E_s(M) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} (\cos \alpha - \cos \beta) d\Sigma_{\text{отв}}$$

$$E_s(M) = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}$$

6) Формулы Френеля - Кирхгофа. Приближение Френеля

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E_s(M) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} (\cos \alpha - \cos \beta) d\Sigma_{\text{отв}}$$

← Выбор см. направления силы.

$$E_s(M) = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}$$

Приближение Френеля: (параксиальное (прикосовое) приближение)

$$b, R_p \ll r_0, r, z$$

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

$$r = z \left(1 + \frac{(x-x_1)^2}{z^2} + \frac{(y-y_1)^2}{z^2} \right)^{1/2}$$

Состоит в том, что фокус отверстия в и фокусное на
котором точка находится от оси симметрии (ось через центр отв-я)
они $\ll r_0, r, z$ (расстояния по ширине от точки макс-е до экран)

$$r \approx z + \frac{(x-x_1)^2}{2z} + \frac{(y-y_1)^2}{2z}$$

маленькие о.с.

$$\cos \alpha \approx 1, \cos \beta \approx 1$$

После подстановки:

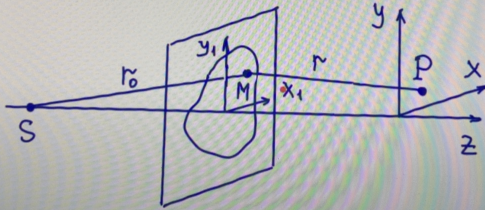
$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z} ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)\right) dx_1 dy_1$$

дзя 12, Чикишев

Приближение Френеля

раск-е поле по отверстию

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z} ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)\right) dx_1 dy_1$$



62) Анализ дифракции на отверстиях с помощью зон Френеля



Анализ состоит в следующем:

1) у нас есть экран с отверстием и точка в которой мы наблюдаем интенсивность прошедшего света;

2) Опустим $\perp$ на n-ть экрану соответ-но тем самым определим расстояние x на котором находится наблюдатель от отверстия

3) Увеличим это расстояние на $\frac{\lambda}{2}$ и проведем окружн-ть в пределах отверстия

такую, что точки лежащие на этой окружн-ти будут находиться от нас на расстоянии $x + \frac{\lambda}{2}$

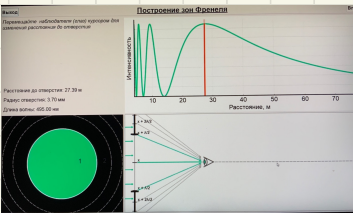
4) Добавляем еще $\frac{\lambda}{2}$ и т.д

Зоны Френеля - это абстрактные физические мы их не наблюдаем

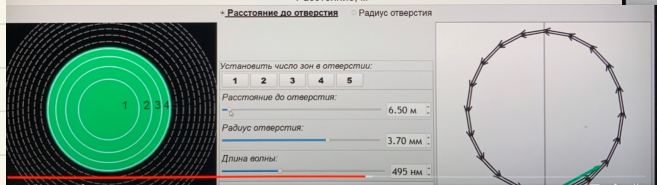
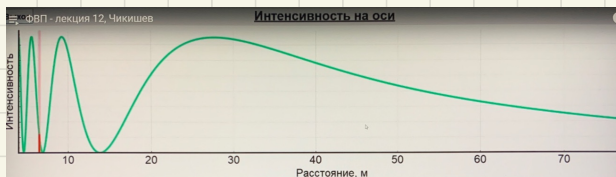
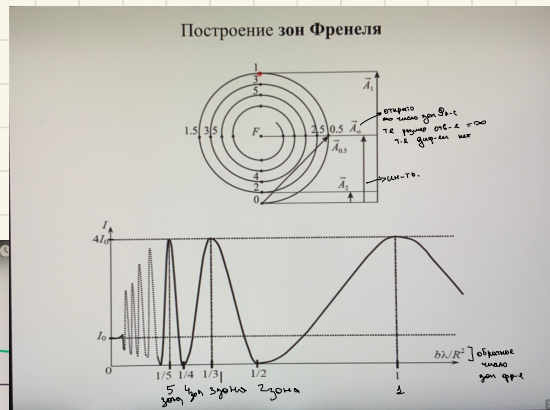
$\frac{\lambda}{2}$ - это разность путей в π

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$$

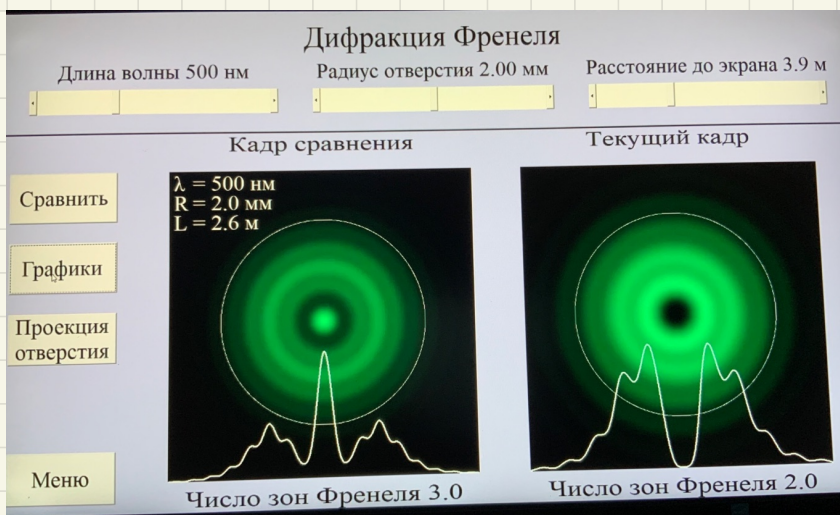
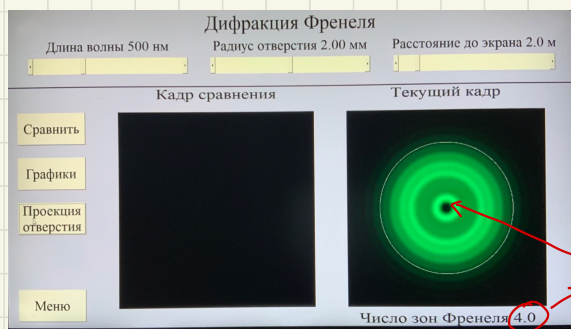
т.е. каждая $\lambda/2$ длины волны - это разн-е в π фазе



четно - мин I
не чет - макс I

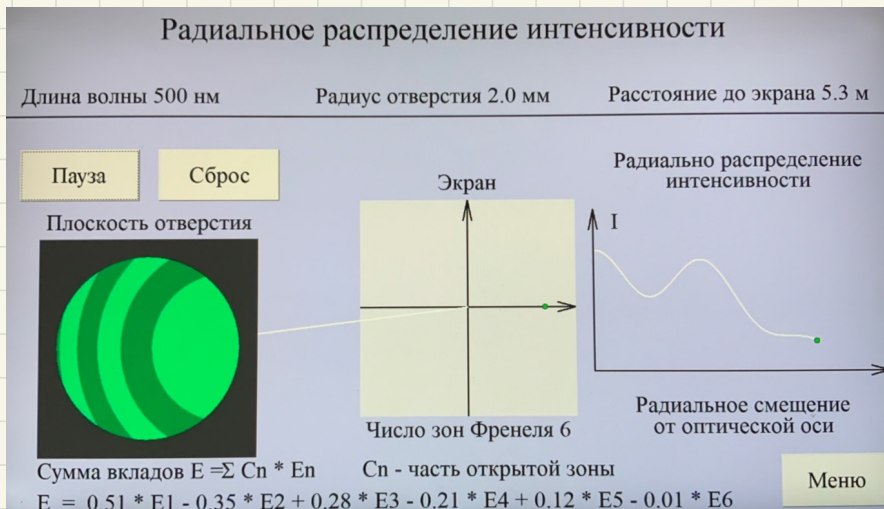


Размер диф-й картин $\sim$ размеру отверстия



Итого: формируются
Френелевские зоны
того, что и на

каждом уровне
концентрации как
имеется картина из-за
колебаний I -и, или
формируется диф-я
картина

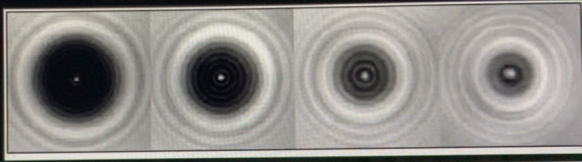


63) Пятно Пуассона

Пятно Пуассона

Закрывается
1-я зона

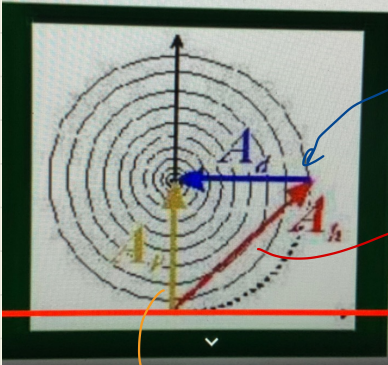
1818 г.



Результат диф-ин волны не на отверстии, а на непрозрачном диске
т.е. если мы закр. диф-ию на непроз. диске, то в центре, в области геом-б тени мы будем наблюдать
светлая пятно

Но, что мы видим пятно описывает принцип Бабинне
Суть:

Принцип Бабинне



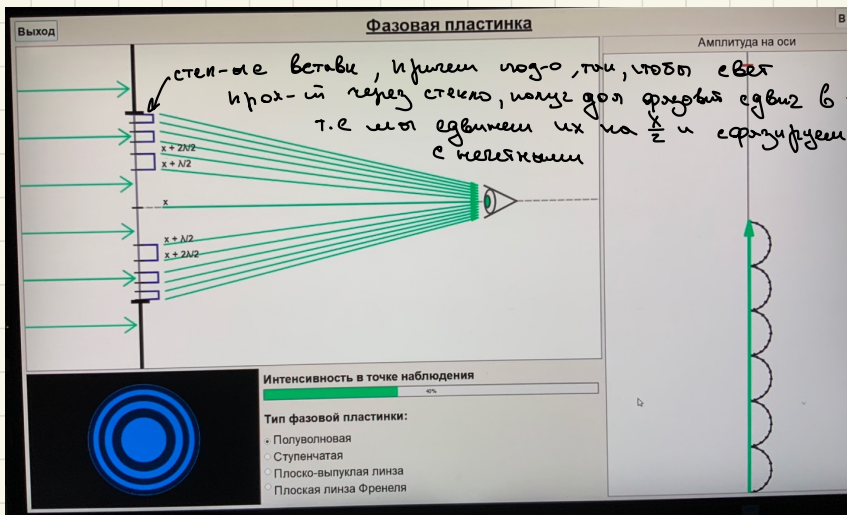
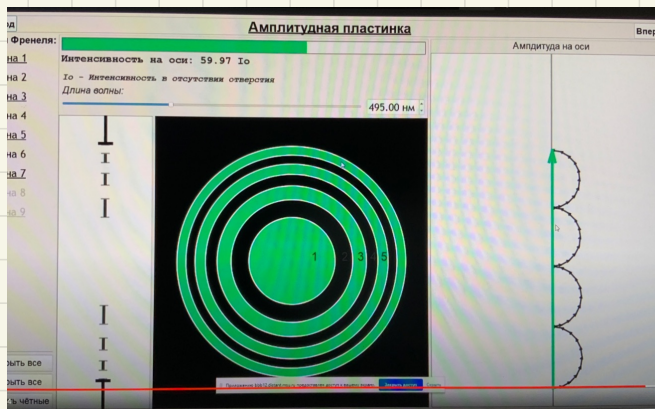
Закрывает $\frac{1}{2}$ до полностью открытой — пятно Пуассона
поле всех остальных зон вплоть до ∞

Результат действия $\frac{1}{2}$ зоны Френеля
поле закрытой $\frac{1}{2}$ 1-й зоны Фр-е

↓ поле сов-ет со светом открытой зон

Как бы мы не ориент-и красную стрелку $\exists$ свет $\neq 0 \Rightarrow$ за непроз. диском
всегда будет светлая область

Если закрыть все четные зоны Френеля, то $I \nearrow$ почти в 15 раз при всех $\sin \alpha$ в 45°



(64) Дифракция Френеля. Изброанное уравнение дифракции

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_0} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z}((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)\right) dx_1 dy_1 \quad \leftarrow \text{Вывод в прог-х делетях}$$

Представим e^{ikz} , или: $E = A(x, y, z) \exp(-ikz)$

Рассм. ур-е дифракции:

$$\Delta E - k^2 E = 0$$

Подставим век в уравнение;

$$\text{получим: } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-ikz} \frac{\partial A}{\partial z} - ikz A \right) = e^{-ikz} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right)$$

$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll 2ik \frac{\partial A}{\partial z}$ это означает медленность из-за эфф-а амплитуды A с координатой z на масштабах порядка длины волны
т.е. мы считаем что поле медленн. в ур-е с коор-т z .

$\Rightarrow$

$$\Delta E \approx e^{-ikz} \left(-2ik \frac{\partial A}{\partial z} - \underbrace{k^2 A}_{\text{сопр-е с век}} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad \text{— пар-е ур-е теории дифракции}$$

Это ур-е описывает двуч-е распространение, т.е. излучение светового потока в процессе дифракции (то есть дифракции)

(65) Эксперимент Тальбо

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \text{Эксп-е ур-е теории дифракции}$$

Это ур-е описывает дифф-е явления, т.е. уширение светового пучка в процессе дифракции (это аналогия дисперсии)

Это ур-е позволяет проанализировать след дифракц-й эффект:

который состоит в том, что если свет дифрактирует на некой периодич-й структуре (экран с периодическими в нем элементами), то на экране будет напр-е пот-н

$$A(x, 0) = A(x \pm p, 0), \quad p = 0, 1, \dots$$

↑ период решетки

$$A(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z) \exp(ik_n x), \quad k_n = \frac{2\pi n}{p}$$

↑ Прос-ая частота

↑ реш-е

Подставляем в ур-е дифракции, получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2ik \exp(ik_n x) \frac{\partial A}{\partial z} - A_n(z) (-k_n^2) \exp(ik_n x)] = 0$$

Для каждого n имеем:

$$2ik \frac{\partial A_n}{\partial z} + k_n^2 A_n(z) = 0$$

$$A_n(z) = A_n(0) \exp\left(\frac{ik_n^2 z}{2k}\right) = A_n(0) \exp(i\varphi_n z), \quad \text{где } \varphi_n(z) = \frac{k_n^2 z}{2k} = \frac{\pi n^2 \lambda}{a^2} z$$

Теперь полная ампл-а поля есть физ. сумм-е

$$A(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z) \exp(ik_n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0) \exp(ik_n x) \exp(i\varphi_n) =$$

$$= \{A_n(z) = 2\pi e, \quad e \in \mathbb{Z} \forall n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0) \exp(ik_n x) = A(x, 0)$$

↑ наше пред-е

Результат в том: что на некой дистанции за решеткой доточно точно воспроизведется то напр-е поле, которое мы создали на решетке. Т.е. на экране тупа решетка

Рассм подробнее наше пред-е:

$$\varphi_n(z) = \frac{k_n^2 z}{2k} = \frac{\pi n^2 \lambda}{a^2} z$$

$$\varphi_n(z) = \varphi_1(z) \cdot n^2 \Rightarrow \varphi_1(z) = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi \lambda}{a^2} z = 2\pi m \Rightarrow \left\{ m = 1 \right\} = \frac{\pi \lambda}{a^2} z = 2\pi \Rightarrow z_{\text{Тальбо}} = \frac{2a^2}{\lambda}$$

↑ min dist-s

Смысл эффекта:

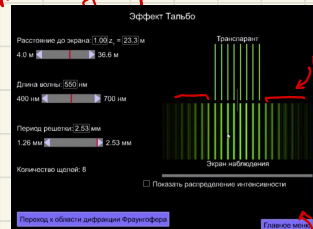
$$A(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z) \exp(ik_n x), \quad K_n = \frac{2\pi n}{a}$$

$$E = A(x, y, z) \exp(-ikz) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(0) \exp(i(\omega t - kz + K_n x)) \exp(i\varphi_n)$$

$$\varphi_n(z) = \frac{K_n^2 z}{2k} = \frac{\pi n^2 \lambda}{a^2} z$$

Мн пред-е, что φ_n - это "правильные фазы" ($\Rightarrow \exp(i\varphi_n) = 1$), но тогда мы имеем дело с набором плоских волн, которые распр-е вдоль z и имеют набор волновых векторов, симметричные отн-о нулю. Волновой вектор на волновой вектор решетки, и получается, что все эти волны сфабрикованы из-за $\exp(i\varphi_n) = 1$.



66 Дифракция Фраунгофера. Условий центр плоских волн

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_{отб}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{z} \left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right)\right) dx_1 dy_1$$

← вывод в прог-х делениях

Можно ли это упростить?

Это возможно где это делаем

$$\frac{ik}{2z} [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] = \frac{ik}{2z} [x_1^2 + y_1^2 - 2(x x_1 + y y_1)]$$

Подставим обратно:

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikz}}{z} \exp\left(-\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2)\right) \cdot \int_{\Sigma_{отб}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2)\right) \cdot \exp\left(\frac{ik}{z} (x x_1 + y y_1)\right) dx_1 dy_1$$

$$\exp\left(-\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2)\right) \approx 1$$

$$\frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \ll \frac{\pi}{4}$$

$$\max\{x_1^2 + y_1^2\} = R^2 \quad \text{размер отверстия}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2z} R^2 \ll \frac{\pi}{4}$$

$$z \gg \frac{R^2}{\lambda} \Leftrightarrow R \ll \sqrt{\lambda z}$$

$$R_0 = \sqrt{\lambda z} \quad R_1 = \sqrt{\lambda z}$$

радиус н-й зоны Френеля

Условий центрпл-х волн?

- 1) Мы делаем диф-ю на от больших расстояний ($z \gg \frac{R^2}{\lambda}$)
- 2) Мы делаем диф-ю на от маленьких отверст-х ($R \ll \sqrt{\lambda z}$)
- 3) Мы делаем диф-ю на тонких пластин и таких размерах отв-х при которых в идеале отверстие не помещается даже 1 зона Френеля

Все это есть-т диф-ии Фраунгофера

Диф-я Фраунгофера - описывается: $E(x, y, z) \sim \int_{\Sigma_{отб}} E(x_1, y_1) \exp(i\eta_x x_1) \cdot \exp(i\eta_y y_1) dx_1 dy_1$ (константа $\frac{1}{z}$, отсу-ет)

т.е. обычно делаем $I \sim |E|^2$, а это $\exp^2 = 1$

$$E(x, y, z) \sim \int_{\Sigma_{отб}} E(x_1, y_1) \exp\left(i\frac{kx}{z} x_1\right) \cdot \exp\left(i\frac{ky}{z} y_1\right) dx_1 dy_1$$

$$\eta_x = \frac{kx}{z} = k \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \quad (\tan \alpha \approx \sin \alpha)$$

$$\eta_y = \frac{ky}{z} = k \sin \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta \quad (\tan \beta \approx \sin \beta)$$

$$E(x, y, z) \sim \int_{\Sigma_{отб}} E(x_1, y_1) \exp(i\eta_x x_1) \cdot \exp(i\eta_y y_1) dx_1 dy_1$$

это 2-е преобразование Фурье

Вывод: диф-я картина, наблюдаемая при диф-ии Фраунгофера представляет 2-х мерное изображение поля на отверстии или на экране

Т.е. диф-я Фраунгофера осу-ет прог-е преобр-е 2-х мерное поле

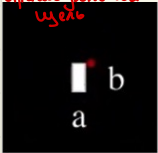
67 Дифракция на щели и прямоугольном отверстии

$$E(x,y,z) \sim \int_{\Sigma_{016}} E(x,y) \exp(i\eta x) \cdot \exp(i\eta y) dx dy$$

$$\eta_x = \frac{kx}{z} = k \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \quad (\tan \alpha \approx \sin \alpha)$$

$$\eta_y = \frac{ky}{z} = k \sin \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta \quad (\tan \beta \approx \sin \beta)$$

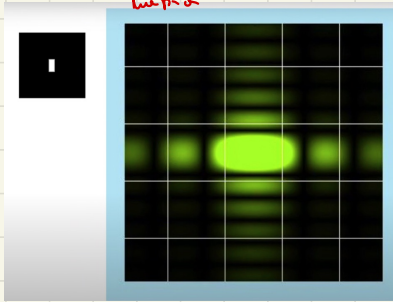
прямоугольное
отверстие



$$E(x,y,z) \sim E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{ka \sin \alpha}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kb \sin \beta}{2}\right)$$

$$I \sim |E|^2$$

чем меньше размер, тем шире диф-я
мра-а



$$I \sim I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ka \sin \alpha}{2}\right)$$

$$I = 0 \Rightarrow \frac{ka \sin \alpha}{2} = n\pi; \quad \frac{2\pi a \sin \alpha}{2\lambda} = n\pi; \quad \sin \alpha = n \frac{\lambda}{a}$$

Для круглого отверстия

$$I \sim I_0 \left[\frac{2J_1(kR \sin \alpha)}{kR \sin \alpha} \right]^2$$

$$I = 0 \Rightarrow \sin \alpha \approx n \frac{3.832\lambda}{2\pi R} \approx 0.61 \frac{\lambda}{R}; \quad \Delta \alpha \approx 1.22 \frac{\lambda}{R}$$

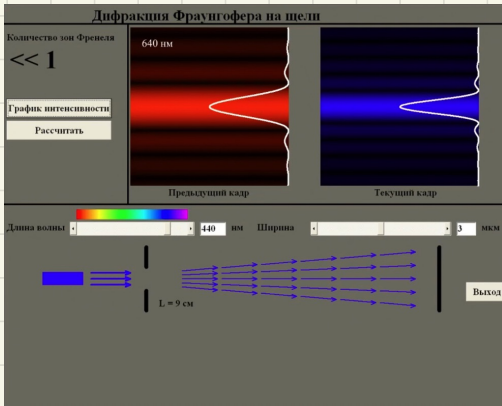
размер п-о макс
центральный макс

линейный размер щели >> размер отверстия

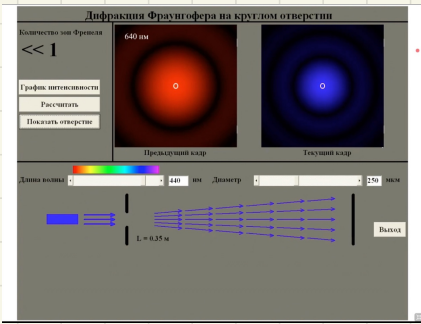
$$\Delta z \approx z \Delta \alpha \approx \frac{\lambda z}{R} \Rightarrow \left\{ z \gg \frac{R^2}{\lambda} \gg \frac{\lambda R^2}{R\lambda} = R \right.$$

Всегда
в диф-ии
Фраунгофера
для кругло-
отверстия
максимум I

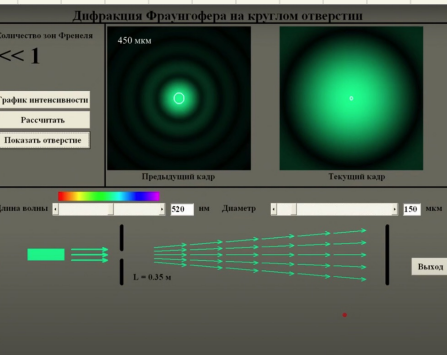
Для щели:



68) Дифракция на круглом отверстии. Дифр.-е расхождение (см. пред-е слайды)



- 1) Расм. дифр-е на круглых отвер-х одина-о диаметри
- 2) В центре максимум
- 3) Влияние длины волны



- 1) Разный фокусер
- 2) Справ меньше отверстие $\Rightarrow$ больше дифр-е карт

69) Пространственно-временная аналогия. Пространственный спектр при дифр-ии на щели и частотный спектр при монох-ом излучении

Распр-е поля на экране со щелью:

$$A_0(x) = \begin{cases} A_0, & x \in [0, b] \\ 0, & x \notin [0, b] \end{cases}$$

Аналогия

Прямой угловой импульс со врем:

$$z(t) = \begin{cases} A_0, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \notin [0, \tau] \end{cases}$$

$$x \Leftrightarrow t$$

$$b \Leftrightarrow \tau$$

схематическое
представление

$$A(k_x) = \int A(x) e^{ik_x x} dx$$

$$S(\omega) = \int z(t) e^{i\omega t} dt$$

$$k_x \Leftrightarrow \omega$$

Спектры:

$$A(k_x) = A_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{k_x b}{2}\right)$$

$$S(\omega) = \frac{A_0 \tau}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sin \alpha \approx \sin \theta$$

Тест. о ШП

размер
дифракционной
щели

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \Delta \theta = \frac{\lambda}{b}$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Допол:

Амплитудная решётка

Амплитудная решётка состоит из периодической последовательности щелей, разделённых непрозрачными промежутками. Многочувствительная интерференция пучков, проходящих через щели, образует дифракционную картину.

Фазовая решётка

Принцип действия фазовой решётки основан на модуляции фазы волны при отражении от периодической структуры.

Дифракционные решётки

Меню

λ - длина волны

d - период решётки b - размер щели

λ

$b = d$ θ d - период решётки

Влияет на амплитуду -

Влияет на фазу

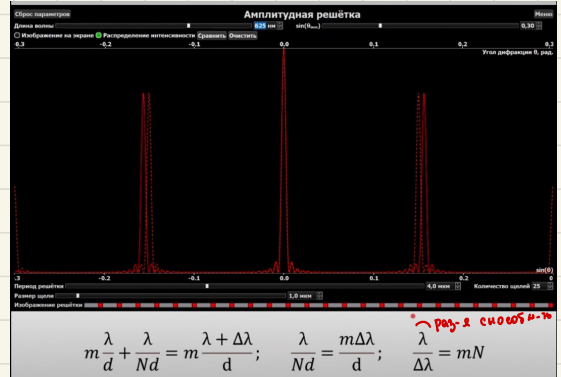
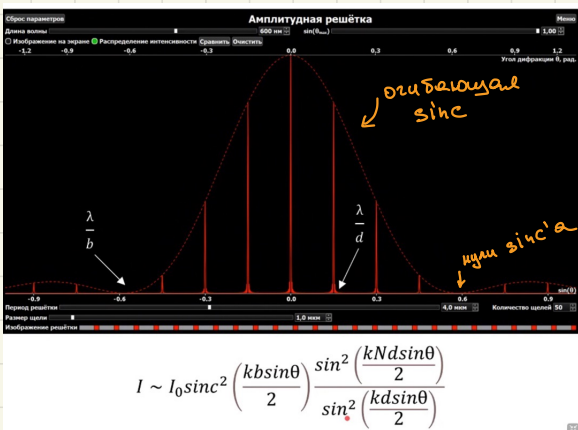
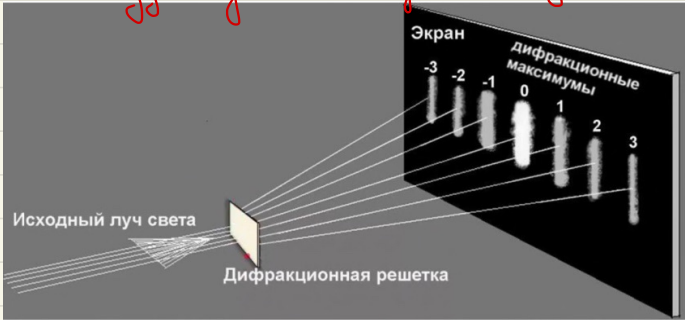
Амплитудная функция в фазовом дифракции

Фраунгофер

где $1-i$ - щели

$$I \sim I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k b \sin \theta}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{k N d \sin \theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k d \sin \theta}{2}\right)}$$

(каждую из щелей можно считать из-за многолучев. интерф-ции)



2 диф-е картины можно раз-ть

если макс 2-й диф-й картины смещен от 1-й на велич. $y = \lambda$ (разрешение до 1 диф-го мин-а)

Апп. е диф. решетки не от хоризонтал, т.к. 0-й максимум везде оди-и
и от плох производит волны с размахом λ



Для фазовой функции Φ параметр - угол блеска
т.е. угол зашляного отр-я; если падает плоский
волны, то с точки зрения геом-й оптики он
должен ограничиться углом θ
фазовая функция работает эффективно $\Leftrightarrow$
угол угла диф-ии блеска и угла блеска

Разовые функции чаще применяются и анализу излучения с разностями t , нежели амплитудна

NB! Фазовая решетка должна быть "настроена" на опр-ую λ

⑦0 Ближняя и дальняя зоны дифракции. Приближенные волн-я оптики. Число зон
 Френеля в отверстии для волн-х волн-я теории диф-ии
 Дифракция Фраунгофера - ои дальнее рассе-е
 Дифр-я Френеля - близна

Таки мунне
 не вберишь ни экзе....

н-я радиусе зоны Френ-е $\nwarrow$ вол-во зон

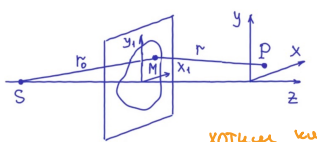
$$\rightarrow R_n^{\Phi} = \sqrt{n\lambda z} \quad n = \frac{R^2}{\lambda z} \quad R_1^{\Phi} = \sqrt{\lambda z} \leftarrow R \text{ д-я зона}$$

	расстояние	размер отвер-я	число зон Френеля
Дальнее рассе-е:	$z \gg \frac{R^2}{\lambda};$	$R \ll \sqrt{\lambda z};$	$n \ll 1$ - Дифр-я Фраунгофера
	$z \sim \frac{R^2}{\lambda};$	$R \sim \sqrt{\lambda z};$	$n = 1, 2, \dots, N$ - Дифр-я Френеля
	$z \ll \frac{R^2}{\lambda};$	$R \gg \sqrt{\lambda z};$	$n \gg 1$ - Теория оптики

71) Фурье-оптика. Системы оптические приближения изображений

Приближение Френеля

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z}((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)\right) dx_1 dy_1$$

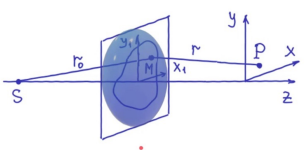


Напомним

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikz}}{z} \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \cdot \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right) \cdot \exp\left(\frac{ik}{z}(xx_1 + yy_1)\right) dx_1 dy_1$$

$$K_{\text{линза}} = \exp\left(\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right)$$

$$E(x_1, y_1) \Rightarrow E(x_1, y_1) K_{\text{линза}} = E(x_1, y_1) \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right)$$



Это возможно если поставить линзу к экрану с отверстием
одинаковую радиусную линзу

Подвод основан на том, что коэффициент, который мы вносим на пути волны излучения благодаря некоторым коэф. преломления (коэф. прелом: $\frac{r_{\text{волн}}}{r_{\text{ваку}}}$) можно считать, что коэф. преломления $\approx 1 \Rightarrow$ линза это чисто фазовое устройство. Линза вносит переменный фазовый сдвиг (т.к. она имеет толщину $\Rightarrow$ излучение проходит через центр линзы с большей фазовой задержкой (чем больше слой стекла, тем больше фазовая задержка))

Большую фазовую задержку (чем больше слой стекла, тем больше фазовая задержка)

$$K_{\text{линза}} = \exp\left(\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)\right)$$

т.к. $I \sim |E|^2$ $K_{\text{лин}} \approx 1 \Rightarrow$ мы I не вносим

$$E(x, y) = E(x_1, y_1) \cdot K_{\text{линза}} = E(x_1, y_1) \exp\left(\frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right)$$

Вспомогательная:

$$E(x, y) = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{-ikz}}{z} \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \cdot \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \cdot \exp\left(-\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right) \cdot \exp\left(\frac{ik}{z}(xx_1 + yy_1)\right) dx_1 dy_1$$

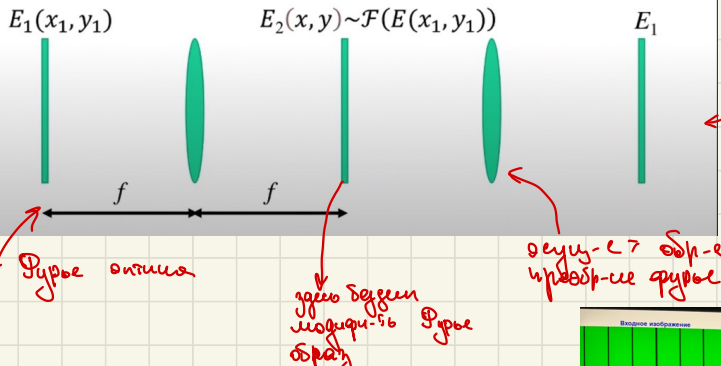
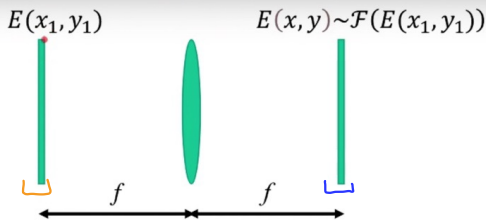
т.к. под линзой преломление ≈ 1 , но если экран с отверстием сместить и фазово изменить в фазе f , то

$z = f$, тогда получим.

$$E(x_1, y_1) \sim \int_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x_1, y_1) \exp\left(\frac{ik}{f}(xx_1 + yy_1)\right) dx_1 dy_1 = \mathcal{F}(E(x_1, y_1))$$

Проблема Фурье

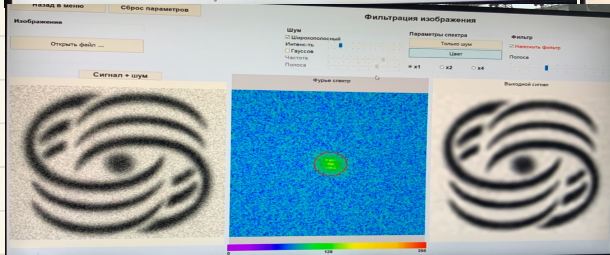
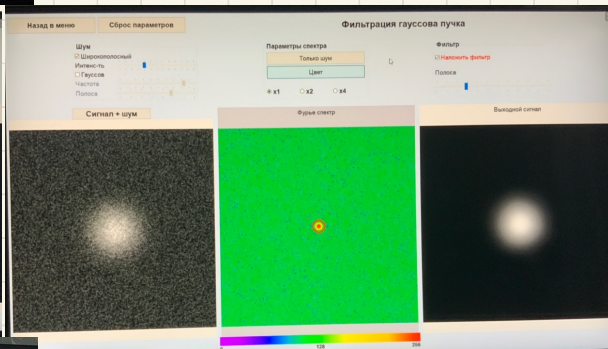
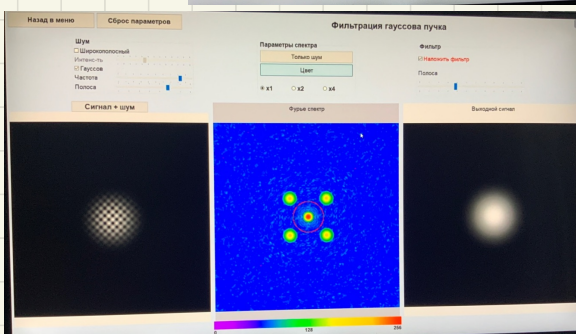
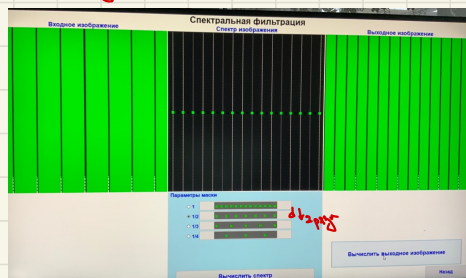
т.е. поле в фазовом линзе, то фазовое поле на экране будет Фурье-образом того поля, которое имеет место быть в пределах отверстия x, y_1



- ① Если не в плоскости на которой мы знаем фазу поле $\rightarrow$
- ② Если фазу мы знаем на \$f\$ фаз. $x \Rightarrow$ то поле которое будет наблюдаться на экране $\rightarrow$ будет преобразом Фурье (относительно до фазового сдвига из-за предельно сложеного)
- Но если собрать, то тогда можно увидеть и амплитуду перед и после

Опыт Аббе-Портера

Входным изображением является двумерная решетка, пространственный спектр, который представляет собой двумерный массив ярких точек, формируемый в фокальной плоскости P2 первой линзы. Пространственный фильтр в виде щелевой диафрагмы в плоскости P3 пропускает лишь спектральные составляющие, расположенные вдоль одной из осей (\$x_2\$). В фокальной плоскости P3 второй линзы формируется выходное изображение одномерной решетки, периодической вдоль оси \$x_3\$.



72) Голлография. Принцип записи и восс-е голог-х изображ-я. Роль когерентности света при записи голограмм.

Голлография - это изготовление изображений которое полностью имитирует предмет

Принципы голографии

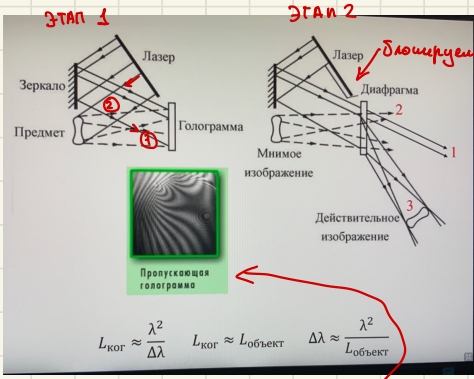
Голография (блос - полный + уграфо - пишу) — набор технологий для точной записи и воспроизведения оптических волновых полей (особый фотографический метод, при котором с помощью лазера регистрируются, а затем восстанавливаются изображения трехмерных объектов, в высшей степени похожие на реальные).

При голограф-ии мы регистрируем интенсивность света, а также фазу волны

При голограф-ии мы регистрируем фазу волны сохр-я

Запись голограф-а состоит из 2-х этапов

- 1) Запись голограмм
 - 2) Воспроизв-е голог-м
- Работают интерф-е + диф-ия



Для записи голограмм необходим когерентный источник освещения

1) Мы берем пучок лазера пучок должен быть

фракционно когерентный

2) Часть пучка идет на зеркало, а часть

на предмет который мы хотим осветить =>

формируются 2-световых потока

Рассеянный предметом свет будет падать до пластики

ПДЕ интерферирует с отраж-м от зеркала пучком!!!

Этап 2:

Виточка на пластинке имеет интерференцию

Теперь ее нужно воспроизв-и: теперь свет падает на нашу голограмму <=> сложная диф-е формируется, т.е. лазерный свет дифр-т на голограмме

В результате 3 пучка

1: 0-й порядок дифр-ии (лучи неслезго) центр 0

2: рассеивающий-е световой поток, который формирует мнимое изображение (то, что мы видим (смотрим на голог-е изд-е) т.е. нам кажется, что за пластинкой предмет и мы видим его изобр-е

3: Схож-й световой поток действ-е, если мы поместим туда фотопластинку, то мы получим фото-ю вещ-го пред-а

Теперь мы точно знаем нужно когерент-но: чтобы не было голог-и и работала интер-е + диф-е

У фазовый пучок имеет постоянную длину волны

$$L_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$$

$$L_{\text{ког}} \approx L_{\text{объект}}$$

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{L_{\text{объект}}}$$

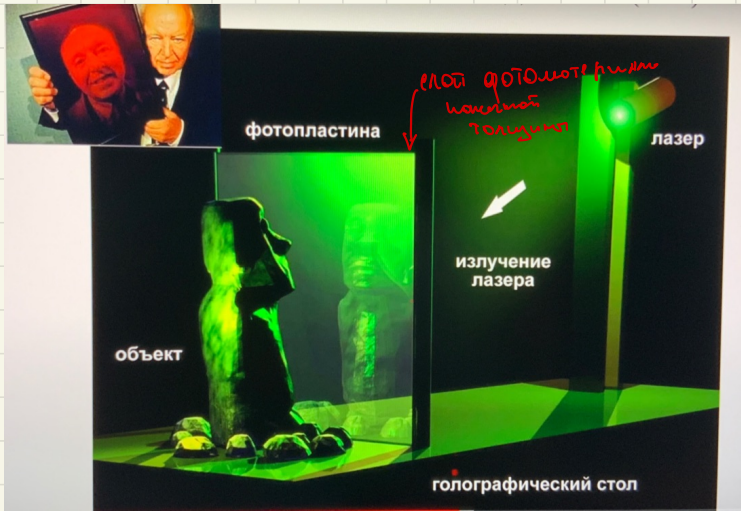
(10^-4 м и 100 нм - ширина спектра)

На этапе воспроизв-и можно обойтись без лазера!

Инженерное Ю.Н. Данилов

Принцип записи:





см билет 48

пути волн-и сферич

① $\vec{E}_1 \sim \vec{E}_1 e^{ik\vec{r}_1}$

② $\vec{E}_2 \sim \vec{E}_2 e^{ik\vec{r}_2}$

$I(r) \sim \langle |\vec{E}|^2 \rangle_t \Rightarrow \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle \Rightarrow (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) = \vec{E}_1^* \vec{E}_1 + \vec{E}_2^* \vec{E}_2 + \vec{E}_1^* \vec{E}_2 + \vec{E}_2^* \vec{E}_1$

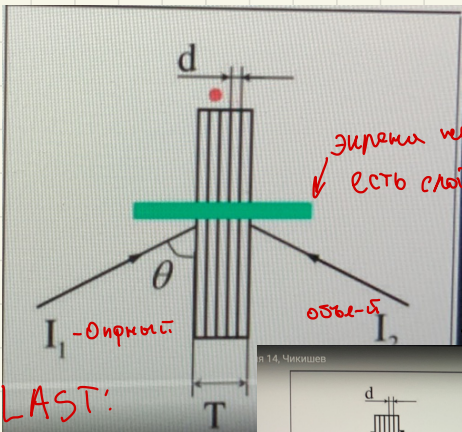
$\vec{E}_1 \vec{E}_2^* = [e^{i(k_1 - k_2) \cdot \vec{r}}] e^{i(k_1 - k_2) \cdot \vec{r}} \Rightarrow \{ \vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \} \Rightarrow I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi$

(Время не учитываем считаем все елих-о т.е это есть у ① и ② волн-е)

комплексно сопр-е велич-и

Если поля ортогональны, то интерференция не будет вообще

$\Delta \varphi = \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}$



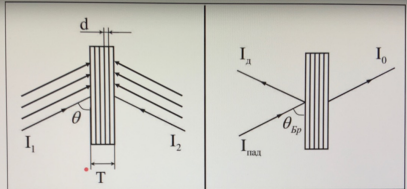
Эти волны формируют не систему волн, а систему волн-и

расстояние между волн-и: $\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$

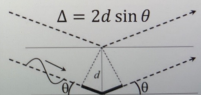
Уточ: при интерференции 2-х волн падающих на фоточувств-й материал с постоянной толщиной с 2-х сторон, формируется некая система волн-и с расстоянием d. Когда мы воспроизводим картину в результате отражения внутри слоя волн-и могут быть разн-е

LAST!

Уточ был цвет то в одной волне-и "заключают" 3 с зеркалом R/B усе



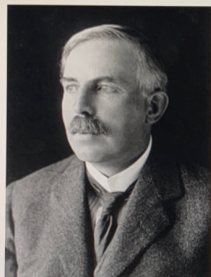
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$



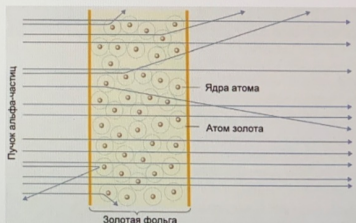
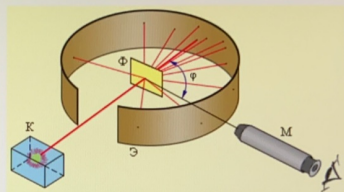
есть $\Delta = 2d \sin \theta \approx m \lambda$, то диф-е будет эф-т не Z т.к d(h), то диф-е будет свет только с опр-й d. Т.е. кварц или Динкисон выбирает из светового потока из-е с правильной d

73) Принцип работы лазера. Накопитель. Усиление. Обратная связь (резонатор). Условия излучения

Опыт Резерфорда



Эрнест Резерфорд
Ernest Rutherford
(1871-1937)
1912 год — опыт Резерфорда



Планетарная модель атома (1913 г.)

Постулаты Бора

Продолжительное время атом может находиться только в стационарных состояниях, в которых атом не излучает.

Излучение происходит только при переходе электрона из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, а энергия излученного фотона равна разности энергий в стационарных состояниях.

Приводит к понятию фотон

Энергетическая система $\forall$ вещества представляет из себя систему дискретных уровней

Laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

- процесс усиления света с помощью вынужденного излучения

Оптический квантовый генератор - устройство, преобразующее световую, электр., тепловую, хим. или другую энергию в энергию излучения

- 1) инвертированного
- 2) монохроматического $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \ll 1$
- 3) когерентного
- 4) узконаправленного

котоны излучения

Лазерное излучение диффундирует

Объемные тл-ты эмиссии фактор излучения

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \epsilon_0 E^2) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div} \vec{S} &= 0 \quad \text{ЗСФ.} \\ [S] &= \frac{B \cdot A}{M \cdot M} = \frac{B \cdot A}{M^2} \\ \omega &= \frac{1}{2} (\mu_0 H^2 + \epsilon_0 E^2) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{E^2}{z^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ z &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c \\ S &= EH = \frac{E^2}{z} = E^2 \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} = c \epsilon_0 E^2 = c \omega \end{aligned}$$

Количество частиц которого мы можем найти на соответствующих энергетических уровнях

Потенциал IP

Если $T = 0 \text{ K} \Rightarrow IP \downarrow$

Поскольку первые 2 уровня заняты, то первое свободное место будет с наименьшей энергией

Скорость перехода (в единицу времени)

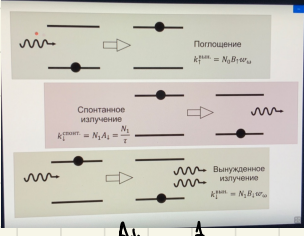
IP (Потенциал ионизации)

среднее время жизни на высшем уровне

$$k_{\downarrow}^{\text{вын}} = N_2 B_{21} \tilde{\omega}$$

$\omega = \frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ коли-о энергии приходя на единичный интервал

$$k_{\uparrow}^{\text{вын}} = N_0 B_{10} \omega$$



$$\Rightarrow \tilde{\omega} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \Rightarrow$$

Ситуация равновесия:

$$k_{\text{спонт-е}} + k_{\downarrow}^{\text{вын}} = k_{\uparrow}^{\text{вын}}$$

$$A_{21} e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} + B_{21} \tilde{\omega} e^{-\frac{E_2}{kT}} = B_{10} \tilde{\omega} e^{-\frac{E_0}{kT}}$$

Можно показать: $B_{10} = B_{21}$

$E_2 - E_0 = \hbar \omega \leftarrow$ энергия фотона

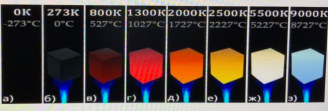
$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

Формула Планка

Она описывает спектральную плотность излучения при температуре T

$$W_{\omega} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}$$

$$S = \sigma T^4$$



Стоимость энергии фотона ЭМ волны

которая затрачивается на создание системы

$k_{\downarrow}^{\text{спонт}} = N_2 A_{21} = \frac{N_2}{\tau}$

$$k_{\downarrow}^{\text{вын}} = N_2 B_{21} \tilde{\omega} \quad k_{\uparrow}^{\text{вын}} = N_0 B_{10} \omega$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \hbar \omega k_{\downarrow}^{\text{вын}} - \hbar \omega k_{\uparrow}^{\text{вын}} = \hbar \omega B_{21} \tilde{\omega} (N_2 - N_0)$$

$$J\alpha = \frac{\hbar \omega B_{21} (N_2 - N_0)}{V - V_{\text{пр}}}$$

$V - V_{\text{пр}}$ - фактически доступный объем света в полости

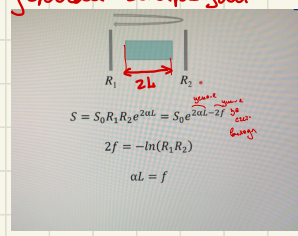
$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \alpha V \tilde{\omega} \Rightarrow S = V \tilde{\omega} \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{dt} = \alpha V S = \frac{dS}{dz} \frac{dz}{dt} = V \frac{dS}{dz}$$

$$\frac{dS}{dz} = \alpha S \Rightarrow S(z) = S_0 e^{\alpha z}$$

Проан-ем с теми же "нашими" уровнями

Last! условие генерации



$$E_1 \text{ --- } N_1$$

$$E_0 \text{ --- } N_0$$

$$N = N_1 + N_0$$

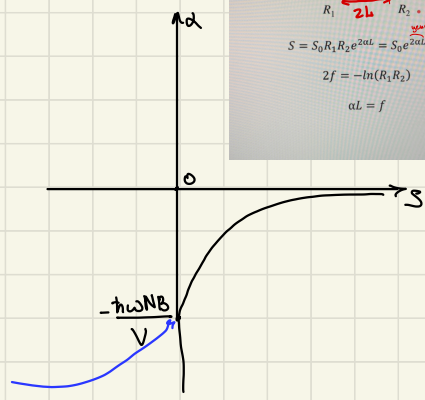
$$\frac{dN}{dt} = -\beta \tilde{\omega}_0 (N_1 - N_0) - \frac{N_1}{\tau}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\beta S (2N_1 - N) \frac{1}{V} - \frac{N_1}{\tau} = \left\{ \frac{dN_1}{dt} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{\frac{N}{2} \frac{\lambda}{1 + \frac{V}{2\tau\beta S}}}{1}$$

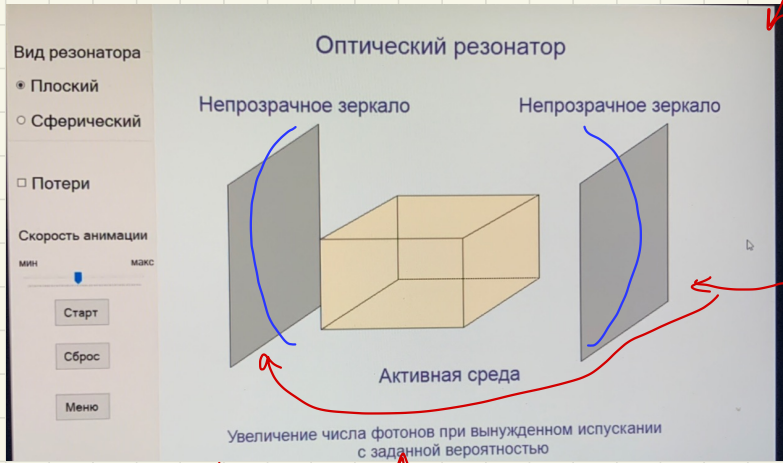
$$\alpha = \frac{\hbar \omega \beta (N_1 - N_0)}{V}$$

$$S_{нас} = \frac{V}{2\tau\beta_0} [\text{насыщ.-е}]$$



Увеличение населенности невозможна в двухур-ей системе

Увеличим - процесс который приводит к переходу матер-х частиц снизу вверх (по эк-м ур-ов)
 Интер-ак нас-ть $\alpha > 0$



Нужен для генерации излуче

Увеличить процесс - один фотон порождает 2-й, 2-4, т.е свет будет увеличив-ся если найдет протоны-не через активную среду, а чтобы этих происхождений было больше ставит 2- не-п-я зеркала. Этот процесс наз-о по-и-е за свет усилив

Оптический резонатор

Чтобы получить в итоге лазер 1 из зеркал делаем полуп-м. То есть он раз-е в один напр-ии (ну вообще так и есть) поэтому в общем случае зеркала сфер-ие.

Количество возрастает из-за того что каждый фотон летит со скоростью фотону, который его породил (т.е эти фотоны приращивают и дюр-дюр-ую по фазе)

Монохроматичность - из-за диск-и эк-их уровней. Полар-ие - можно добить-е доп. мех-и ухитр-е

74) Свой-во лазерного излучения. Основные лазеры в устройстве зрения и медицине: чир-ли, медицина, опти-с материалов

Laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

- процесс усиления света с помощью вынужденного излучения

Оптический квантовый генератор - устройство, преобразующее световую, элек-ую, тепловую, хим-ю или другую энергию накачки в энергию

- 1) когерентного
2) монохроматического $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$
3) коллимированного
4) узконаправленного
котоиа излучение
- Свой-во лазерного излучения

Типы лазеров

- ✓ Твердотельные лазеры (кристаллы, стёкла, полупроводники, оптические волокна)
- ✓ Лазеры на растворах красителей
- ✓ Газовые лазеры

Накачка

- ✓ Оптическое излучение
- ✓ Электрический ток
- ✓ Электрический разряд
- ✓ Химическая реакция
- ✓ Передача энергии в активной среде (ударные процессы)

Лазерный луч с Р ~ 1 Вт может очень быстро

Энергетические характеристики

КПД 0.01 – 40%

Мощность (квази)непрерывного излучения – десятки тысяч ватт

для сравнения: солнечная постоянная = 1366 Вт/м²

Концентрация энергии излучения в пространстве и времени

Пример: за одну секунду лазер генерирует 1000 импульсов при средней мощности излучения 100 мВт, длительность одного импульса составляет 100 фс

Импульсная мощность составляет 1 ГВт (10⁹ Вт)
Мощность крупнейшей в мире электростанции «Три ущелья» (КНР) составляет 22,5 ГВт



10⁻¹⁵ с - это эк. и импульс

$10^{-15} = 10^{-12} \cdot 10^{-3}$
за 1000 фс
мощность
одного импульса

Возможна $I \Leftrightarrow$ Возм. вых. E

и мы можем добиться таких мощностей которые возникают в меж атом-и молеку-ли (легкая ионизация)

опто волокно



Доставка лазерного излучения

Оптоволокно

Применение лазеров

- передача и запись информации - компьютер диск CD/DVD
- медицина
- нелинейная оптика
- военные и технологические применения

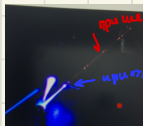
Вывод - В 90-е замкнули/открыли лазер замкнули на себя

Примерно любые из-а оптики крошечны в нано м

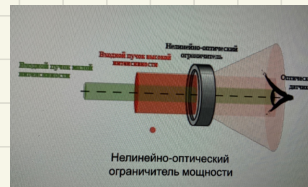
Умножим $\lambda_c = \frac{1}{2} \lambda_{кр}$ $\Rightarrow$ Спектр сел = $\frac{1}{4}$ Спектр красн. $\Rightarrow$ Объем м-и больше

Медицина: стоматология, лазерный скальпель,

Нелинейная оптика:



Фронт волн увеличивает λ
2 фотона красн = 1 ф. сел



Военные:

Применение лазеров

- передача и запись информации
- медицина
- нелинейная оптика
- **военные и технологические применения**



Лазерная сварка

Л. режим

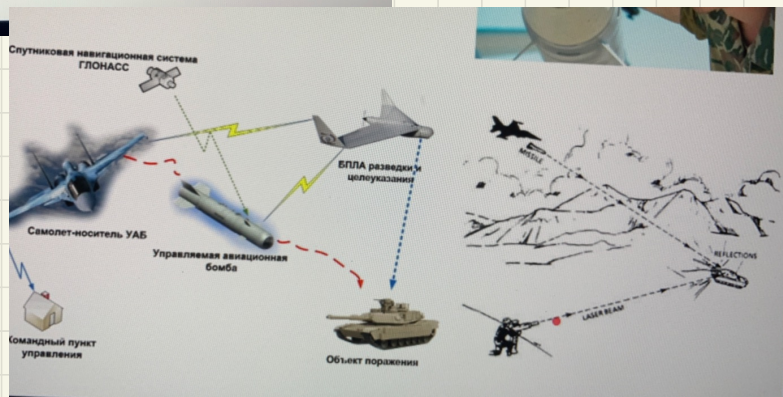
Оптика и пробой

Применение лазеров

- передача и запись информации
- медицина
- нелинейная оптика
- **военные и технологические применения**



Лазерный комплекс



Применение лазеров

- передача и запись информации
- медицина
- нелинейная оптика
- военные и технологические применения
 - удобство доставки
 - эффективная фокусировка
 - возможность передачи большого количества энергии за короткое время
 - возможность создания голограмм
 - использование для диагностики при помощи спектроскопических методов, основанных на анализе свойств рассеянного излучения